Вестник Омского университета, 1997, Вып. 2. С. 14-16.

УДК 519.4

ПРОЕКЦИЯ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ С ОРБИТЫ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА ПОДАЛГЕБРУ КАРТАНА

С.В. Никитин

Омский государственный университет, кафедра математического анализа
644077, Омск, пр. Мира,55-А

Получена 1 апреля 1997 г.

An explicit geometric construction is given for the projection to a Cartan subalgebra of a compact Lie algebra of the invariant measure on a coadjoint orbit. The density of the projection is the volume of a polytope which is the intersection of a cone and an affine subspace.

1. Введение

В 1973 г. Костант в своей работе [1] показал, что если G компактная группа и $\mathfrak{g}$ ее алгебра Ли, то для элемента X из подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ выполнено равенство

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(Ad(G)X) = \mathrm{conv}(\mathcal{W} \cdot X),$$

где $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ - ортогональная проекция (относительно формы Киллинга); $\mathcal{W}$ - группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathrm{conv}(A)$ означает выпуклую оболочку множества A.

Теорема Костанта о выпуклости является обобщением более ранних результатов Шура и Хорна. В 1923 г. Шур доказал, что диагональ $a = (a_{11}, \ldots, a_{nn})$ эрмитовой матрицы A=(a_{ij}) порядка n с собственными числами $r = (r_1, \ldots, r_n)$ содержится в выпуклой оболочке множества $S_n \cdot r$, где S_n - симметрическая группа, действующая на $\mathbb{C}^n$ перестановками координат. Затем Хорн показал, что каждая точка этой выпуклой оболочки может быть получена таким способом.

Таким образом, проекция орбиты $Ad(G)X$ - это выпуклый многогранник с вершинами в точках $\mathcal{W} \cdot X$. В 1982 г. Guillemin и Stenberg [2], а также Atiyah [3] дали интерпретацию теоремы Костанта как теоремы о выпуклости отображения моментов. Следующий естественный шаг - нахождение проекции инвариантной меры с орбиты на подалгебру Картана. Существует формула Duistermaat-Heckman'a [4, 5] для преобразования Лапласа проекции инвариантной меры, по которой она может быть восстановлена, но представляет интерес и прямая геометрическая конструкция для нахождения проекции инвариантной меры, которая предложена в этой статье.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{g}$ - конечномерная вещественная простая компактная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ - ее подалгебра Картана. Группа Ли G алгебры $\mathfrak{g}$ действует на $\mathfrak{g}^*$ с помощью коприсоединенного представления Ad^*: $g\cdot\lambda = Ad^*(g)\lambda = \lambda\circ Ad(g)^{-1}$, где $g\in G$, $\lambda\in\mathfrak{g}^*$. Определим орбиту элемента $\lambda\in\mathfrak{g}^*$:

$$\mathcal{O}_\lambda = \{g\cdot\lambda \mid g\in G\}.$$

На каждой орбите $\mathcal{O}_\lambda$ существует единственная с точностью до пропорциональности инвариантная мера μ_λ, т.е. такая, что для любой непрерывной функции φ и для любого $g\in G$

$$\int\limits_{\mathcal{O}_\lambda}\varphi(\xi)d\mu_\lambda(\xi) = \int\limits_{\mathcal{O}_\lambda}\varphi(Ad^*(g)\xi)d\mu_\lambda(\xi).$$

Пусть $\pi:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{h}^*$ ортогональная проекция. Определим проекцию меры μ_λ на $\mathfrak{h}^*$ - это мера $\pi\mu_\lambda$, задаваемая соотношением:

$$\int\limits_{\pi\mathcal{O}_\lambda}\varphi(\xi)d\pi\mu_\lambda(\xi) = \int\limits_{\mathcal{O}_\lambda}\varphi(\pi\xi)d\mu_\lambda(\xi),$$

где φ - финитная непрерывная функция на $\mathfrak{h}^*$. Мера $\pi\mu_\lambda$ абсолютно непрерывна и $d\pi\mu_\lambda(\xi) = p_\lambda(\xi)d\xi$, где p_λ - плотность проекции меры μ_λ. Нахождению плотности p_λ и посвящена эта статья.

Введем некоторые обозначения: Δ - система корней алгебры $\mathfrak{g}$, Δ^+ - множество положительных корней, $\rho = \frac{1}{2}\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ - их полусумма. Пусть $\mathcal{P}$ - решетка весов алгебры $\mathfrak{g}$, кроме того, пусть Λ_+ обозначает множество $\mathcal{P}\cap\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ - камера Вейля. Λ_+ представляет собой множество всех старших весов $\mathfrak{g}$. Каждому неприводимому представлению группы G соответствует единственный старший вес $\lambda\in\Lambda_+$. Если $\mathcal{X}_\lambda$ - характер этого представления, то формула Кириллова утверждает, что

$$\mathcal{X}_\lambda(\exp X)j(X) = \int\limits_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\xi(X)}d\mu_{\lambda+\rho}(\xi),\ X\in\mathfrak{h},$$

где

$$j(X) = \prod_{\alpha\in\Delta^+}\frac{\sin(\alpha(X)/2)}{\alpha(X)/2}.$$

Интеграл в правой части формулы Кириллова можно понимать как обратное преобразование Фурье от функции $p_{\lambda+\rho}$:

$$\int_{O_{\lambda+\rho}} e^{i\xi(X)} d\mu_{\lambda+\rho}(\xi) = \int_{\pi O_{\lambda+\rho}} e^{i\xi(X)} p_{\lambda+\rho}(\xi) d\xi.$$

Таким образом, формулу Кириллова можно переписать в следующем виде:

$$\chi_\lambda(\exp X) j(X) = \mathcal{F}^{-1}\left[p_{\lambda+\rho}\right](X)$$

или

$$p_{\lambda+\rho} = \mathcal{F}[\chi_\lambda(\exp)] * \mathcal{F}[j].$$

Пусть π_λ неприводимое представление $\mathfrak{g}$. Обозначим множество весов π_λ как Λ_λ. Если $\mu \in \Lambda_\lambda$, то n_μ обозначает кратность веса μ в представлении π_λ. Известно, что

$$\chi_\lambda(\exp X) = \sum_{\mu \in \Lambda_\lambda} n_\mu e^{i\mu(X)}, \ \ X \in \mathfrak{h}.$$

Поэтому, применяя преобразование Фурье к обеим частям равенства, получаем:

$$\mathcal{F}[\chi_\lambda(\exp)] = \sum_{\mu \in \Lambda_\lambda} n_\mu \dot{\mu},$$

где $\dot{\mu}$ - дельта-функция в точке μ. Найдя функцию $r(\xi) = \mathcal{F}[j](\xi)$, мы получим выражение для функции $p_{\lambda+\rho}$:

$$p_{\lambda+\rho}(\xi) = \sum_{\mu \in \Lambda_\lambda} n_\mu r(\xi - \mu), \ \ \lambda \in \mathcal{K} \cap \mathcal{P},$$

или

$$p_\lambda(\xi) = \sum_{\mu \in \Lambda_{\lambda-\rho}} n_\mu r(\xi - \mu), \ \ \lambda \in \mathrm{Int}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{P}.$$

Точное выражение для функции $r(\xi)$ в дальнейшем не требуется, нам достаточно знать, что это положительная, финитная, кусочно-непрерывная функция.

3. Функция $\tilde{Q}$

В этом разделе мы определим функцию $\tilde{Q}$, через которую выражается функция p_λ, а также укажем некоторые ее свойства.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: d - ранг алгебры, т.е. размерность подалгебры Картана $\mathfrak{g}$, s - число положительных корней, r - разность s-d, которая строго больше нуля для всех алгебр Ли (кроме алгебры A_1). Для того чтобы определить $\tilde{Q}$, мы рассмотрим систему положительных корней $\Delta^+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ как проекцию набора из s попарно ортогональных векторов. Остановимся на этом более подробно.

Пусть $\Delta \subset \mathcal{E}$, где $\mathcal{E} = \mathfrak{h}^*$ - векторное пространство, порожденное Δ, т.е. линейная оболочка множества Δ, $\dim \mathcal{E} = d$. Рассмотрим некоторое векторное пространство L, в которое $\mathcal{E}$ вложено как подпространство векторов, имеющих ненулевыми первые d координат. Имеется естественная ортогональная проекция $p : L \to \mathcal{E}$. Нетрудно проверить, что если выбрать подходящую (достаточно большую) размерность пространства L, то в L можно найти набор из s векторов $\{e_1, \ldots, e_s\}$ таких, что (e_i,e_j)=0, если $i \neq j$ и, кроме того, $pe_i = \alpha_i$. Пространство V - линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_s$, которые образуют в нем ортогональный базис. Введем следующее обозначение:

$$V^+ = \left\{ \sum_{i=1}^{s} t_i e_i,\ t_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, s \right\}.$$

V^+ - это конус в пространстве V, порожденный векторами $e_1, \ldots, e_s$. Определим на $\mathcal{E}$ функцию $\tilde{Q}$ следующим образом:

$$E_\xi = \left\{ p^{-1}\xi \cap V^+ \right\},\ \xi \in \mathcal{E}.$$

$$\tilde{Q}(\xi) = mes\,\{E_\xi\},$$

где mes - мера Лебега на $p^{-1}\xi$.

Замечание. В случае алгебры Ли A_1 множество E_ξ 0-мерно. В этом случае можно считать, что функция $\tilde{Q}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{Q}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0 \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Функция $\tilde{Q}$ определена всюду в $\mathcal{E}$, непрерывна, кусочно-полиномиальна и определяется алгеброй $\mathfrak{g}$ с точностью до пропорциональности, т.е. при выборе другого базиса $\{e_1, \ldots, e_s\}$ функция $\tilde{Q}$ лишь умножается на константу.

Можно рассматривать функцию $\tilde{Q}$ как непрерывное продолжение дискретной функции Костанта. Функция Костанта $Q(\mu),\ \mu \in \mathcal{Q}$, где $\mathcal{Q}$ - решетка корней алгебры; $\mathfrak{g}$ - это число способов представить μ в виде суммы положительных корней, Q(0)=1. Пусть $Z = \left\{ \sum_{i=1}^{s} m_i e_i \mid m_i \in \mathbb{Z} \right\}$ - решетка в V. Тогда $Q(\mu)$ равно числу элементов в множестве $E_\mu \cap Z$, а $\tilde{Q}(\mu)$ - это мера или объем E_μ. Для примера функция Костанта $Q(\mu)$ и функция $\tilde{Q}(\mu)$ для алгебры Ли A_2 связаны следующим образом: $Q(\mu) = \tilde{Q}(\mu) + 1$, $\mu \in \mathcal{Q}$. Формула Костанта для кратностей весов в неприводимом представлении со старшим весом λ такова:

$$n_\mu(\lambda) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^w Q(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)).$$

4. Основной результат

Теорема. *Пусть* $\lambda \in \mathrm{Int}(\mathcal{K})$. *Тогда проекция инвариантной меры с орбиты коприсоединенного представления, проходящей через точку* λ, *имеет плотность* p_λ:

$$p_\lambda(\xi) = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^w \tilde{Q}(w\lambda - \xi). \qquad (*)$$

Кроме того, функция $p_\lambda(\xi)$ *является непрерывной, кусочно-полиномиальной, инвариантной относительно действия группы Вейля* $\mathcal{W}$ *функцией, носитель которой содержится в множестве* $\mathrm{conv}(\mathcal{W} \cdot \lambda)$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Докажем равенство (*) для $\lambda \in \mathcal{P} \cap \mathrm{Int}(\mathcal{K})$. Сечение $p^{-1}\xi \cap \mathcal{O}_\lambda$ орбиты $\mathcal{O}_\lambda$, проходящее через точку $\xi \in \pi\mathcal{O}_\lambda$, имеет размерность r, поэтому $p_\lambda(\xi) = \frac{1}{n^r} p_{n\lambda}(n\xi)$. Таким образом, мы получаем:

$$p_\lambda(\xi) = \frac{1}{n^r} p_{n\lambda}(n\xi) = \frac{1}{n^r} \sum_{\mu \in \Lambda_{n\lambda-\rho}} n_\mu r(n\xi - \mu).$$

Для вычисления n_μ используется формула Костанта для кратностей весов. Если $\mu \in \Lambda_{n\lambda-\rho}$, то

$$n_\mu = \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^w Q(nw\lambda - (\mu + \rho)).$$

Затем обе части равенства умножаются на непрерывную финитную функцию φ, интегрируются по $\mathcal{E}$ и, наконец, n устремляется к бесконечности (при этом сумма в правой части рассматривается как интегральная сумма). После некоторых преобразований получается следующее равенство:

$$\int_{\mathcal{E}} p_\lambda(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{\mathcal{E}} \sum_{w \in \mathcal{W}} (-1)^w \tilde{Q}(w\lambda - \xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Так как это верно для любой непрерывной функции φ, то получаем (*) для всех $\lambda \in \mathcal{P} \cap \mathrm{Int}(\mathcal{K})$. После этого, используя однородность функции $\tilde{Q}$, (*), доказывается для всех $\lambda = k\tau$, $\lambda \in \mathrm{Int}(\mathcal{K})$, где $k \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathcal{P}$, а затем, используя предельный переход, и для всех $\lambda \in \mathrm{Int}(\mathcal{K})$. Непрерывность и кусочно-полиномиальность следуют из соответствующих свойств функции $\tilde{Q}$.

Докажем инвариантность относительно действия группы Вейля, т.е. равенство $p_\lambda(w\xi) = p_\lambda(\xi)$, $w \in \mathcal{W}$. Так как для функции $j(X)$ выполнено равенство $j(wX)=j(X)$, то верно и $r(w\xi) = r(\xi)$. Далее, если $\lambda \in \mathcal{P} \cap \mathrm{Int}(\mathcal{K})$, то

$$p_\lambda(w\xi) = \sum_{\mu \in \Lambda_{\lambda-\rho}} n_\mu r(w\xi - \mu) =$$

$$= \sum_{\mu \in \Lambda_{\lambda-\rho}} n_\mu r(w(\xi - w^{-1}\mu)) = \sum_{\mu \in \Lambda_{\lambda-\rho}} n_\mu r(\xi - w^{-1}\mu) =$$

$$= \sum_{\nu \in \Lambda_{\lambda-\rho}} n_\nu r(\xi - \nu) = p_\lambda(\xi).$$

Затем равенство $p_\lambda(w\xi) = p_\lambda(\xi)$ доказывается для всех $\lambda \in \mathrm{Int}(\mathcal{K})$. Из равенства (*) легко получить, что $(\mathrm{supp}\, p_\lambda) \cap \mathcal{K} = \mathrm{conv}(\mathcal{W} \cdot \lambda) \cap \mathcal{K}$. Так как функция p_λ $\mathcal{W}$-инвариантна, то $\mathrm{supp}\, p_\lambda = \mathrm{conv}(\mathcal{W} \cdot \lambda)$. .

Литература

[1] Kostant B. On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1973. N.6. C.413-455.

[2] Guillemin V., Stenberg S. Convexity properties of the moment mapping // Invent. Math. 1982. N.67. C.491-513.

[3] Atiyah M. Convexity and commuting hamiltonians // Bull. London Math. Soc. 1982. N.14. C.1-15.

[4] Duistermaat J. J., and Heckman G. J. On the variation in the cohomology in the symplectic form of the reduced phase space // Invent. Math. 1982. N.69. C.259-268.

[5] Neeb K.-H. A Duistermaat-Heckman formula for admissible coadjoint orbits, preprint.