Вестник Омского университета, 1997, Вып. 2. С. 11-13.

УДК 519.214.5

СТРОГОЕ ПРИТЯЖЕНИЕ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С РАВНОМЕРНО СИЛЬНЫМ ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

С.А. Клоков

Омский государственный университет, кафедра математического анализа
644077, Омск, пр. Мира, 55-А

Получена 1 апреля 1997 г.

The aim of this paper is to extend the well-known Peligrad's resultabout convergence to the normal law for distributions with regular tails.The essential generalization is made and the result is proved for thedistributions that have SO-varying tails.

1. Введение. Обозначения. Постановка задачи

Пусть $\{\xi_n\}$ - стационарная (в узком смысле) последовательность случайных величин (с.в.), $\mathcal{F}_{\le n}$, $\mathcal{F}_{\ge n}$ - σ-алгебры, порожденные семействами $\{\xi_j : j \le n\}$, $\{\xi_j : j \ge n\}$. Говорят, что $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания (РСП), если коэффициент перемешивания

$$\varphi(n) = \sup\{|\mathsf{P}(B|A) - \mathsf{P}(B)| : A \in \mathcal{F}_{\le 0}, B \in \mathcal{F}_{\ge n}\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Как обычно, через σ_n^2 обозначим дисперсию суммы $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$, а через $\mathcal{N}$ - нормальную с.в. с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Символы $\xrightarrow{d}$ и $\stackrel{d}{=}$ обозначают сходимость по распределению и равенство распределений с.в., $\|\cdot\|$ - норму в L_2, $\mathbf{1}$(A) - индикатор множества $\mathbf{A}$. Через $\xi(z)$ обозначим срезку $\xi\mathbf{1}(|\xi| < z)$, через $\sigma_n^2(z)$ - дисперсию суммы $S_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(z)$. Вместе с последовательностью $\{\xi_n\}$ будет рассматриваться последовательность $\{\hat{\xi}_n\}$ таких с.в., что $\xi_n \stackrel{d}{=} \hat{\xi}_n$и $\{\xi_n\}$ независимы. В случае, если функции f и g связаны соотношением $f \le const \cdot g$, где const - абсолютная константа, будем писать $f \ll g$, а если $f \ll g$ и $g \ll f$, то $f \asymp g$.

Будем считать известными определения правильно меняющихся и медленно меняющихся функций (см., например, [5]).

Говорят, что последовательность с.в. $\{\xi_n\}$ притягивается к нормальному закону, если при некотором выборе нормирующих констант A_n и $B_n \to +\infty$ имеет место соотношение $B_n^{-1} S_n - A_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}$, $\sigma_n^2 \to \infty$. В случае, если с.в. $\{\xi_n\}$ имеют конечные вторые моменты, дисперсия суммы $\sigma_n^2 \to \infty$ и $\sigma_n^{-1}(S_n - \mathsf{M}S_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}$ говорят, что к последовательности применима центральная предельная теорема (ЦПТ).

Первые предельные теоремы для слабо зависимых величин были доказаны И.А. Ибрагимовым в начале 60-х годов. Условие РСП дает возможность доказывать результаты о сходимости к нормальному закону без каких-либо предположений о скорости перемешивания (стремления $\varphi(n)$ к нулю). В этом случае будем говорить, что справедливо строгое притяжение к нормальному закону. В [?] доказана

Теорема 1. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *- стационарная последовательность с.в., удовлетворяющая условию РСП,* $\mathsf{M}\xi_1 = 0$, $\mathsf{M}|\xi_1|^{2+\delta} < \infty$ *для некоторого* $\delta > 0$ *и* $\delta > 0$. *Тогда к последовательности* $\{\xi_n\}$ *применима ЦПТ.*

Для последовательности независимых одинаково распределенных с.в. ЦПТ справедлива, если потребовать существование лишь вторых моментов. Исходя из этого, в [1] высказана

Гипотеза (Ибрагимов, 1965).

Пусть $\{\xi_n\}$ *- стационарная последовательность с.в., удовлетворяющая условию РСП,* $\mathsf{M}\xi_1 = 0$ *и* $\mathsf{M}\xi_1^2 < \infty$. *Тогда к последовательности* $\{\xi_n\}$ *применима ЦПТ.*

Пусть $\{\xi_n\}$ - последовательность независимых одинаково распределенных с.в., не имеющих вторых моментов. Тогда распределение ξ_1 принадлежит области притяжения нормального закона тогда и только тогда, когда функция $H(x) = \mathsf{M}\xi_1^2(x)$ является ММФ. Иосифеску сформулировал следующее предположение.

Гипотеза (Ибрагимов-Иосифеску).

Пусть $\{\xi_n\}$ *- стационарная последовательность с.в., удовлетворяющая условию РСП с* $\varphi(1) < 1$, $\mathsf{M}\xi_1 = 0$ *и H(x) - ММФ. Тогда* $\{\xi_n\}$ *притягивается к нормальному закону.*

Гипотезы Ибрагимова и Ибрагимова-Иосифеску не доказаны и не опровергнуты до сих пор.

Хорошо известны два достаточных условия для медленного изменения H(x): существование конечного второго момента ($\mathsf{M}\xi_1^2 < \infty$) и правильное изменение хвоста распределения одного слагаемого ($\mathsf{P}\{|\xi_1| \geq x\}$ - ПМФ порядка -2). В работе [4] доказана

Теорема 2. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *- стационарная последовательность с.в., удовлетворяющая условию РСП, причем* $\varphi(1) < 1$. *Пусть* $\mathsf{M}\xi_1 = 0$, *выполнено соотношение*

$\mathsf{P}\{|\xi_1| \geq x\} = 1/(x^2 h(x))$, (1)

где h(x) - ММФ. Тогда $\{\xi_n\}$ *притягивается к нормальному закону.*

В настоящей работе показано, что теорема 2 остается справедливой, если на функцию *h(x)* из (1) наложить более слабое ограничение, чем медленное изменение. В монографии

Е.Сенеты предложено обобщение понятия ММФ. Функция *h(x)* называется SO-меняющейся [3], если существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2, что для всех $\lambda > 1$ выполнено

$$0 < C_1 \le \liminf_{x\to\infty}\frac{h(\lambda x)}{h(x)} \le \limsup_{x\to\infty}\frac{h(\lambda x)}{h(x)} \le C_2 < \infty. \quad (2)$$

Очевидно, что ММФ *h(x)* удовлетворяет (2), но не наоборот. Примерами SO-меняющихся функций могут служить любые функции, отделенные от нуля и от бесконечности. Таким образом, введенное расширение класса ММФ является нетривиальным.

Основным результатом работы является обобщение теоремы 2:

Теорема 3. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *- стационарная последовательность с.в., удовлетворяющая условию РСП,* $\mathsf{M}\xi_1 = 0$ *и выполнено соотношение*

$$\mathsf{P}\{|\xi_1| \ge x\} = 1/(x^2 h(x)), \quad (3)$$

где h(x) - SO-меняющаяся функция. Тогда $\{\xi_n\}$ *притягивается к нормальному закону.*

Обобщение результата М. Пелиграда стало возможным благодаря уточнению доказательства теоремы 2, данного в работе [4].

2. Вспомогательные результаты

Из (2) очевидным образом следует

Лемма 1. *Пусть h(x) - SO-меняющаяся функция. Тогда* $h(\lambda x) \asymp h(x)$ *для любого фиксированного* λ *и для любой функции* $\lambda = \lambda(x) \to +\infty$ *достаточно медленно.*

Определим последовательность $\{a_n\}$ *соотношением* $a_n = \sup\{x \ge 0 : \mathsf{P}\{|\xi_1| \ge x\} \ge 1/n\}$.

Лемма 2. *Пусть выполнено (3). Тогда*

а) $n\mathsf{P}\{|\xi_1| \ge x a_n\} \asymp x^{-2}$ *для любого x > 0 или* $x = x(n) \to +\infty$ *достаточно медленно;*

б) если целое число k фиксировано или целочисленная последовательность $k = k(n) \to +\infty$ *достаточно медленно, то* $a_{nk}^2 \asymp k a_n^2$.

Доказательство. Из определения a_n легко выводится, что

$$n\mathsf{P}\{|\xi_1| \ge a_n\} \asymp 1. \quad (4)$$

Из (4) и леммы 1 следует, что

$$n\mathsf{P}\{|\xi_1| \ge x a_n\} = \frac{n}{x^2 a_n^2 h(x a_n)} \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{x^2}\frac{n}{a_n^2 h(a_n)} = x^{-2} n\mathsf{P}\{|\xi_1| \ge a_n\} \asymp x^{-2}. \quad (5)$$

Пункт а) доказан. Теперь докажем б). Пусть D > 0 - некоторая константа. Из (4) и леммы 1, аналогично (5), выводим для любого фиксированного k или $k = k(n) \to +\infty$ достаточно медленно, что

$$nk\mathsf{P}\{|\xi_1| \ge \sqrt{Dk}\, a_n\} \asymp D^{-1} n\mathsf{P}\{|\xi_1| \ge a_n\} \asymp D^{-1}.$$

Выбором достаточно большой константы $D = D_1$ можно добиться, что $nk\mathsf{P}\{|\xi_1| \geq \sqrt{D_1 k} a_n\} < 1$, откуда следует, что $a_{nk}^2 \leq D_1 k a_n^2$. Выбирая достаточно малую константу D = D_2, получим, что $a_{nk}^2 \geq D_2 k a_n^2$. Таким образом, $a_{nk}^2 \asymp k a_n^2$.

Лемма 3. *Пусть $\{\xi_{n,j}\}$- схема серий с.в. с конечными вторыми моментами, в каждой серии с.в. $\xi_{n,j}$образуют стационарную последовательность, удовлетворяющую условию РСП с одним и тем же коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$ причем $\varphi(1) < 1$. Пусть $T_{n,j} = \sum_{l=1}^{j}(\xi_{n,l} - \mathsf{M}\xi_{n,l})$, $\sigma_n^2 = \mathsf{M}T_{n,n}^2$. Тогда*

$$\mathsf{M}\max_{1\leq j\leq n} \widehat{\xi}_{n,j}^2 \ll \max_{1\leq j\leq n} \mathsf{M}T_{n,j}^2 \ll \sigma_n^2 \quad (6)$$

Доказательство. Первое неравенство в (6) доказано в предложении 3.3 из [4], а второе выведено в [3, лемма3.3].

Лемма 4. Для любого фиксированного k или $k = k(n) \to +\infty$ достаточно медленно выполнено соотношение $\sigma_{nk}^2(a_{nk}) \sim k\sigma_n^2(a_{nk})$.

Доказательство. Схема доказательства приведена в [?, теорема 18.2.3].

Лемма 5. Пусть k = k(n) - целочисленная последовательность, достаточно медленно стремящаяся к бесконечности, и имеет место (3). Тогда

$$\mathsf{M}\max_{1\leq j\leq n} \widehat{\xi}_j^2(a_{nk}) \gg A(n)\cdot a_n^2, \quad (7)$$

где $A(n) \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Для проведения оценки (7) используются идеи М. Пелиграда, предложенные в [4]. В силу пункта б) леммы 2 существует такая константа C > 0, что $a_{nk} \geq Ck^{1/2}a_n$. Пусть $\{\xi_n\}$ - такая числовая последовательность, что $z_n \to +\infty$ и z_n = o($Ck^{1/2}$). Тогда, имея в виду пункт а) леммы 2, легко видеть, что для $1 \leq z \leq z_n$

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\{|\xi_1| \geq Ck^{1/2}a_n\} = o(\mathsf{P}\{|\xi_1| \geq za_n\}), \\ &\mathsf{P}\{|\xi_1(a_{nk})| \geq za_n\} \gg \mathsf{P}\{|\xi_1| \geq za_n\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) выводим

$$\mathsf{M}\max_{1\leq j\leq n} \widehat{\xi}_j^2(a_{nk}) = 2\int_0^\infty x\mathsf{P}\{\max_{1\leq j\leq n}\left|\widehat{\xi}_j(a_{nk})\right| \geq x\}dx \geq$$

$$\geq 2a_n^2\int_1^{z_n} z(1-(1-\mathsf{P}\{|\xi_1(a_{nk})| \geq za_n\})^n)dz \geq$$

$$\geq 2a_n^2\int_1^{z_n} z(1-(1-\delta\mathsf{P}\{|\xi_1| \geq za_n\})^n)dz = A(n)\cdot a_n^2,$$

где d > 0 - некоторая константа. Пользуясь пунктом а) леммы 2, нетрудно вычислить, что $A(n) \asymp \ln z_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

3 Доказательство основного результата

В работе А.Г. Гриня [?] введено понятие универсальной нормирующей последовательности (УНП) $b_n = \sup\{x \geq 0 : \sigma_n(x) \geq x\}$. Там же доказана

4. Пусть $\{\xi_n\}$ - стационарная последовательность, удовлетворяющая условию РСП. Для того чтобы $\{\xi_n\}$ притягивалась к нормальному закону, достаточно, а если $\varphi(1) < 1$, и необходимо, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ $n\mathrm{P}\{|\xi_1| \geq \varepsilon b_n\} \to 0$, $n \to \infty$. Пусть k = k(n) - целочисленная последовательность, стремящаяся к бесконечности столь медленно, что одновременно справедливы леммы 2, 4, 5. Тогда, имея в виду еще и лемму 3, получаем

$$\frac{a_{nk}^2}{\sigma_{nk}^2(a_{nk})} \asymp \frac{ka_n^2}{k\sigma_n^2(a_{nk})} \ll$$
$$\ll \frac{a_n^2}{\mathrm{M}\max\limits_{1 \leq j \leq n} \xi_j^2(a_{nk})} \ll \frac{1}{A(n)} \to 0,\ n \to \infty. \tag{9}$$

Вместе с определением УНП (9) означает, что $\sigma_{nk}^2(a_{nk}) \leq b_{nk}^2$ и $a_n^2 = o(b_n^2)$. Пусть последовательность q = q(n) стремится к бесконечности столь медленно, что $a_n^2 = o(q^{-1}b_n^2)$. Пользуясь пунктом а) леммы 2, имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$n\mathrm{P}\{|\xi_1| \geq \varepsilon b_n\} \leq n\mathrm{P}\{|\xi_1| \geq q a_n\} \asymp \frac{1}{q^2} \to 0$$

при $n \to \infty$. Согласно теореме 4, последовательность $\{\xi_n\}$ притягивается к нормальному закону. Теорема доказана.

Литература

[1] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

[2] Гринь А.Г. Об областях притяжения для сумм зависимых величин // Теория вероятн. и ее применен. 1990. Т. 35. N2. С. 255-270.

[3] Peligrad M. An invariance principle for φ-mixing sequences. - Ann. Probab. 1985. V. 13. N4. P. 1304-1313.

[4] Peligrad M. On Ibragimov-Iosifescu conjecture for φ-mixing sequences // Stochastic Processes and their Applications. 1990. V. 35. P. 293-308.

[5] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 142 с.