Вестник Омского университета, 2004. № 2. С. 19–21.

УДК 512.573

ОБ ОДНОМ РАДИКАЛЕ АЛГЕБР СО СВОЙСТВОМ ТРАНСВЕРБАЛЬНОСТИ ПО МИНИМАЛЬНЫМ МНОГООБРАЗИЯМ

Л.М. Мартынов

Омский государственный педагогический университет, кафедра алгебры
644099, Омск, наб. Тухачевского, 14[1]

Получена 1 марта 2004 г.

We prove that in any algebry A from arbitrary variety $\mathbf{V}$ there exists the largest complete scatter. If $\mathbf{V}$ is transverbal by minimal subvarieties then this scatter admits the congruence ρ of A such that A/ρ is a reduced algebra.

В теории абелевых групп важную роль играют понятия полноты (делимости) и редуцированности. В частности, в любой абелевой группе существует наибольшая полная подгруппа, фактор-группа по которой редуцирована. Тем самым в классе всех абелевых групп определяется радикал [1], который будем называть в дальнейшем полным радикалом.

В работе [2] определены аналоги понятий полноты и редуцированности для произвольных алгебр. А именно алгебра из данного многообразия $\mathbf{V}$ алгебр называется (атомно) *полной* тогда и только тогда, когда она не имеет гомоморфизмов на нетривиальные алгебры из атомов решетки $L(\mathbf{V})$ подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$. *Редуцированной* называется алгебра, не имеющая нетривиальных полных подалгебр.

Основной целью настоящей статьи является получение достаточного условия существования аналога полного радикала абелевых групп для произвольных алгебр.

Формулировке основного результата представим необходимые определения и обозначения. Одноэлементную алгебру мы называем *тривиальной.* Элемент алгебры A называется *идемпотентом*, если он порождает тривиальную подалгебру. Произвольное дизъюнктное семейство подалгебр алгебры A называется *россыпью алгебры* A, а алгебры, которые ее составляют, называются *компонентами россыпи.* На множестве $S(A)$ всех россыпей алгебры A естественным образом определяется частичный порядок $\preceq$: для любых россыпей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ считают $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда каждая компонента россыпи $\mathcal{A}$ является подалгеброй некоторой компоненты россыпи $\mathcal{B}$. Ясно, что $S(A)$ есть полная (в обычном смысле) решетка, наименьшим элементом которой является пустая россыпь. Условимся через $\mathcal{E}_A$ обозначать *тривиальную россыпь*, т. е. либо россыпь, компонентами которой являются в точности все тривиальные подалгебры алгебры A, либо пустую россыпь в случае отсутствия идемпотентов в алгебре A. Россыпь будем называть полной, если все ее компоненты являются полными алгебрами. В частности, тривиальная россыпь алгебры A является полной.

Блоки конгруэнции ρ алгебры A, которые являются ее подалгебрами, образуют россыпь $ker(\rho)$ алгебры A, которую мы называем *ядром* ρ. Россыпь $\mathcal{D}$ из $S(A)$ будет называть *конгруэнц-допустимой в* A, если $\mathcal{D} = ker(\rho)$ для некоторой конгруэнции ρ на A. Для конгруэнц-допустимой россыпи $\mathcal{D}$ из $S(A)$ наименьшую конгруэнцию с ядром $\mathcal{D}$ будем называть конгруэнцией, порожденной россыпью $\mathcal{D}$, и обозначать через $\rho_{\mathcal{D}}$. Условимся при этом фактор-алгебру $A/\rho_{\mathcal{D}}$ обозначать через $A/\mathcal{D}$. Мы говорим, что *алгебра* A *есть расширение россыпи* $\mathcal{D}$ *посредством алгебры* B, если $\mathcal{D}$ конгруэнц-допустима в A и $A/\mathcal{D} \cong B$.

Будем говорить, что *россыпь* $\mathcal{D}$ *принадлежит классу* $\mathbf{K}$ *алгебр*, если все ее компоненты принадлежат $\mathbf{K}$. Напомним, что $\mathbf{K}$-произведением [3] подклассов $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ класса $\mathbf{K}$ называется его подкласс $\mathbf{X} \circ_{\mathbf{K}} \mathbf{Y}$, состоящий из алгебр, являющихся расширенем россыпей из $\mathbf{X}$ с помощью алгебр из $\mathbf{Y}$. Если $\mathbf{X} \circ_{\mathbf{K}} \mathbf{X} = \mathbf{X}$, то мы говорим, что $\mathbf{X}$ *замкнут относительно расширений в* $\mathbf{K}$.

Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие алгебр, $L(\mathbf{V})$ – ре-

[1] e-mail: mart@omsk.edu

шетка его подмногообразий, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$ и $A \in \mathbf{V}$. Ядро $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ алгебры A называется $\mathbf{X}$-*вербалом алгебры* A и обозначается через $\mathbf{X}(A)$. Если $\mathcal{D} = \{A_i : i \in I\}$ есть россыпь алгебры A, то россыпь $\mathbf{X}(\mathcal{D}) = \cup_{i \in I} \mathbf{X}(A_i)$ называется $\mathbf{X}$-*вербалом россыпи* $\mathcal{D}$.

Алгебра A называется *трансвербальной* [3] *по многообразию* $\mathbf{X}$, если для любой конгруэнц-допустимой россыпи $\mathcal{D}$ алгебры A ее $\mathbf{X}$-вербал $\mathbf{X}(\mathcal{D})$ также является конгруэнц-допустимой россыпью алгебры A. Если любая алгебра из многообразия $\mathbf{V}$ трансвербальна по $\mathbf{X}$, то $\mathbf{V}$ будем называть трансвербальным по подмногообразию $\mathbf{X}$. Если многообразие $\mathbf{V}$ трансвербально по любому своему подмногообразию, то оно называется *трансвербальным.*

Основным результатом статьи является **теорема**.

1. Пусть $\mathbf{V}$ *– произвольное многообразие алгебр. В любой алгебре* A *многообразия* $\mathbf{V}$ *существует наибольшая полная россыпь* $\mathcal{C}(A)$.

2. Если $\mathbf{V}$ *трансвербально по минимальным многообразиям, то*

а) россыпь $\mathcal{C}(A)$ *является конгруэнц-допустимой;*

б) фактор-алгебра алгебры A *по конгруэнции* $\rho_{\mathcal{C}(A)}$, *порожденной россыпью* $\mathcal{C}(A)$, *является редуцированной.*

Доказательство.

1. Пусть $\mathbf{V}$ – произвольное многообразие алгебр и A – любая алгебра из $\mathbf{V}$. Рассмотрим россыпь $\mathcal{C}(A)$, порожденную всеми полными россыпями алгебры A, и покажем, что она является полной. Действительно, для любой полной россыпи $\mathcal{C}$ и любого минимального многообразия $\mathbf{P}$ имеем $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}(A)$ и поэтому $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \preceq \mathbf{P}(\mathcal{C}(A))$. Отсюда $\mathcal{C}(A) \preceq \mathbf{P}(\mathcal{C}(A))$. Учитывая очевидное обратное включение $\mathbf{P}(\mathcal{C}(A)) \preceq \mathcal{C}(A)$, получаем равенство $\mathbf{P}(\mathcal{C}(A)) = \mathcal{C}(A)$.

2. Пусть теперь $\mathbf{V}$ трансвербально по минимальным многообразиям.

Покажем сначала, что россыпь $\mathcal{C}(A)$ является конгруэнц-допустимой. Рассмотрим наименьшую конгруэнц-допустимую россыпь $\mathcal{D}$, содержащую $\mathcal{C}(A)$. Для любого минимального многообразия $\mathbf{P}$ из включения $\mathcal{C}(A) \preceq \mathcal{D}$ следует включение $\mathbf{P}(\mathcal{C}(A)) \preceq \mathbf{P}(\mathcal{D})$. Учитывая, что $\mathbf{P}(\mathcal{C}(A)) = \mathcal{C}(A)$, имеем $\mathcal{C}(A) \preceq \mathbf{P}(\mathcal{D})$. Поскольку $\mathcal{D}$ – конгруэнц-допустимая россыпь, в силу трансвербальности $\mathbf{V}$ по минимальным многообразиям россыпь $\mathbf{P}(\mathcal{D})$ также конгруэнц-допустима, и поэтому $\mathcal{D} \preceq \mathbf{P}(\mathcal{D})$. Так как обратное включение очевидно, получаем требуемое равенство $\mathbf{P}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. В силу произвольности выбора минимального многообразия $\mathbf{P}$ делаем вывод о полноте россыпи $\mathcal{D}$. Но $\mathcal{C}(A)$ – наибольшая полная россыпь и, следовательно, $\mathcal{D} \preceq \mathcal{C}(A)$. Таким образом, $\mathcal{D} = \mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{C}(A)$ – конгруэнц-допустимая росссыпь.

Покажем теперь,что фактор-алгебра $\overline{A} = A/\rho$, где $\rho = \rho_{\mathcal{C}(A)}$, редуцирована. Пусть $\overline{C}$ – полная подалгебра алгебры $\overline{A}$ и C – прообраз $\overline{C}$ при естественном гомоморфизме A на $\overline{A}$. По доказанному наибольшая полная россыпь $\mathcal{C}(C)$ алгебры C является конгруэнц-допустимой в C. Пусть $\sigma = \rho_{\mathcal{C}(C)}$ – соответствующая конгруэнция алгебры C. Тогда из очевидного включения $\mathcal{C}(C) \preceq \mathcal{C}(A)$ следует включение $\sigma \subseteq \rho$ и по третьей теореме об изоморфизме алгебр ([4], теорема 3.11, с. 75) получаем $(C/\sigma)/(\rho/\sigma) \cong C/\rho$. Поскольку в силу утверждения 1 работы [2] фактор-алгебра полной алгебры является полной, $ker(\rho/\sigma)$ – полная россыпь. Применяя теперь дважды (сначала к $(C/\sigma)/(\rho/\sigma)$, а затем к C/σ) утверждение 2 работы [2] о том, что расширение полной россыпи с помощью полной алгебры является полной алгеброй, получим, что C - полная подалгебра алгебры A. Но тогда $\preceq \mathcal{C}(A)$ и, значит, подалгебра $\overline{C}$ алгебры $\overline{A}$ тривиальна. Таким образом, алгебра $\overline{A}$ не имеет нетривиальных полных подалгебр и, следовательно, является редуцированной.

Замечание 1. Доказанная теорема показывает, что любая алгебра многообразия $\mathbf{V}$, трансвербального по минимальным многообразиям, является расширением ее наибольшей полной россыпи при помощи редуцированной алгебры. Таким образом, в многообразии $\mathbf{V}$ определен радикал ($\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$) (в смысле Куроша), где радикальный класс $\mathbf{R}$ состоит из всех полных алгебр из $\mathbf{V}$, а полупростой класс $\mathbf{S}$ – из всех редуцированных алгебр из $\mathbf{V}$. Многообразие $\mathbf{V}$ при этом совпадает с $\mathbf{V}$- произведением $\mathbf{R} \circ_{\mathbf{V}} \mathbf{S}$. Заметим, что, согласно утверждениям 1 и 2 работы [2], класс $\mathbf{R}$ является замкнутым относительно гоморфных образов и расширений, а, согласно утверждению 5 той же работы, класс $\mathbf{S}$ является предмногообразием, замкнутым относительо расширений в $\mathbf{V}$. Заметим, что отображение r, ставящее в соответствие каждой алгебре A из $\mathbf{V}$ наибольшую полную конгруэнц-допустимую россыпь $r(A)$ $(= \mathcal{C}(A))$, удовлетворяет условиям аксиоматического определения радикала [1]:

R1) если $\varphi : A \to B$ – такой гомоморфизм алгебры A в алгебру B, что образ $\varphi(r(A))$ есть россыпь алгебры B, то $\varphi(r(A)) \preceq r(\varphi(A))$;

R2) в любой алгебре A россыпь $r(A)$ является r-радикалом алгебры A, т. е. наибольшей конгруэнц-допустимой r-радикальной (полной) россыпью;

R3) для любой алгебры A имеет место $r(A/r(A)) = \mathcal{E}_{A/r(A)}$.

На самом деле этот радикал r строгий [5], так как $r(A)$ содержит любую r-радикальную россыпь алгебры A.

Замечание 2. В любой алгебре A из многообразия $\mathbf{V}$ алгебр с единственным идемпотентом наибольшая полная россыпь состоит из одной компоненты – наибольшей полной подалгебры $C(A)$, – которая, согласно доказанной теореме, является конгруэнц-допустимой в случае, если $\mathbf{V}$ трансвербально по минимальным многообразиям. В этом случае $C(A)$ совпадает с подалгеброй алгебры A, порожденной всеми полными подалгебрами алгебры A. В общем случае, как отмечалось в [2], наибольшей полной подалгебры в алгебре A может и не быть.

Замечание 3. Поскольку любой подмодуль произвольного модуля над ассоциативным кольцом R с единицей является конгруэнц-допустимым, многообразие всех R-модулей является трансвербальным. Многообразие всех групп также трансвербально, так как для любого многообразия $\mathbf{X}$ групп вербальная подгруппа $\mathbf{X}(H)$ любой нормальной подгруппы H данной группы G является вполне характеристической подгруппой в H и потому нормальной подгруппой в G. Таким образом, в указанных многообразиях определен полный радикал.

Замечание 4. Трансвербальность многообразий линейных алгебр над произвольным ассоциативным и коммутативным кольцом R с единицей довольно редкое явление, так как уже, например, многообразие всех ассоциативных колец не является таковым (см., напр., [3]). Однако со свойством трансвербальности по минимальным многообразиям дело обстоит иначе. Напомним, что, как отмечалось в [6] (теорема 12), минимальные многообразия моноассоциативных R-алгебр исчерпываются многообразиями $\mathbf{Z}_M$, заданными в классе всех моноассоциативных R-алгебр системами тождеств $\{Mx = 0, xy = 0\}$ для любых максимальных идеалов M кольца R, и многообразиями $\mathbf{F}_M$, заданными системами тождеств $\{Mx = 0, x^p = x\}$ для любых максимальных идеалов M кольца R, имеющих конечный индекс, и любых простых чисел p. Учитывая, что $\mathbf{Z}_M$ – вербал $\mathbf{Z}_M(I)$ любого идеала I моноассоциативной R-алгебры A есть идеал в I, порожденный подалгеброй $MI+I^2$, а фактор-алгебра $I/\mathbf{F}_M(I)$ не имеет нильпотентных элементов, заключаем, что некоторое многообразие $\mathbf{M}$ моноассоциативных R-алгебр будет трансвербальным по минимальным многообразиям, если выполнены, например, следующие два условия:

1) квадрат идеала любой алгебры A из $\mathbf{M}$ является идеалом в A;

2) если A – любая алгебра из $\mathbf{M}$, B – идеал в A, C – идеал в B и B/C – алгебра без нильпотентных элементов, то C – идеал в A.

Как отмечалось в работе [7], в силу известных результатов второе условие выполняется для ассоциативных, альтернативных, лиевых и йордановых R-алгебр (предполагается, что $1/2 \in R$ в случае йордановых алгебр). Все перечисленные виды R-алгебр, кроме последнего, удовлетворяют и первому условию, и поэтому в них существует полный радикал. В случае йордановых алгебр куб идеала является идеалом ([8], лемма 3, с. 109) и нам не известно, является ли многообразие йордановых алгебр трансвербальным по многообразию $\mathbf{Z}_M$? Так что мы оставляем открытым вопрос о существовании полного радикала в йордановых алгебрах.

Для линейных алгебр, в которых имеется полный радикал, последний является в некотором смысле антиподом к хорошо известному радикалу Джекобсона, поскольку, например, любая нильпотентная ассоциативная R-алгебра, аддитивная группа которой редуцирована, является полупростой в нашем смысле, а любое не простое R-поле является радикальной алгеброй.

---

[1] *Курош А.Г.* Радикалы колец и алгебр // Матем. сб. 1953. Т. 33. С. 13–26.

[2] *Мартынов Л.М.* О понятиях примарности, полноты, редуцированности и чистоты для произвольных алгебр // Универсальная алгебра и ее приложения: Труды межд. семинара. Волгоград: Перемена, 2000. С. 179–190.

[3] *Мальцев А.И.* Об умножении классов алгебраических систем // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8. № 2. С. 346–365.

[4] *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

[5] *Курош А.Г.* Радикалы в теории групп // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3. С. 912–931.

[6] *Артамонов В.А.* Решетки многообразий линейных алгебр // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33. № 2. С. 135–167.

[7] *Мартынов Л.М.* О примарных и редуцированных многообразиях моноассоциативных алгебр // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 103–112.

[8] *Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И.* Кольца близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.