Вестник Омского университета, 2001. №.2. С.14–15.

УДК 517.957

БИМОДУЛИ КРИЧЕВЕРА-ДРИНФЕЛЬДА И МАТРИЧНЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАКСА РАНГА 2

Г.И. Сечкин†, А.В. Латышев‡

† *Омский государственный педагогическитй угиверситет, кафедра математического анализа 644099, Омск-99, Наб Тухачевского, 14* [1]

‡ *Московский педагогический университет, кафедра математического анализа*

Получена 18 апреля 2001 г.

The solutions of nonlinear partial differential Lax equations are obtained with the help of algebro-geometric method. The integration of high rank Lax equation can be reduced to constructing a pure algebraic objects - the Krichever-Drinfeld bimodules.

В многомерной обратной задаче рассеяния известны два подхода: методы теории функций и функционального анализа [1] и методы алгебраической геометрии [2-4].

Предварительно напомним некоторые определения.

Пусть K-ассоциативное кольцо с единицей и V-абелева группа с аддитивной записью; отображения $(x, v) \mapsto xv$ из $K \times V$ в V удовлетворяют условиям: $x(u+v) = xu + xv$, $(x+y)v = xv + yv$, $(xy)v = x(yv)$, $1 \cdot v = v$ для всех $x, y \in K$, $u, v \in V$. Тогда V называют левым K-модулем. Аналогично определяется правый K-модуль.

Пусть k - некоторое поле характеристики O, B - k-алгебра с единицей, в которой заданы попарно коммутирующие k-дифференцирования $\partial_j, j = 1,2,3$, т.е. ∂_j - такое k-линейное отображение B на B, что $\partial_j(ab) = \partial_j ab + a\partial_j b$. Основным примером алгебры B служит алгебра мероморфных функций нескольких переменных, $k = C$ или $k = R$, дифференцирование $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x}$ обозначим просто ∂.

Модулем Кричевера-Дринфельда (кратко КД-модулем) называется левый B-модуль M, где B - k-алгебра с дифференцированиями $\partial_j, j = 1,2,3$, в котором имеется отмеченный элемент e, задана возрастающая фильтрация $M_i, i \geq -1$ и действует k-линейное отображение $\nabla : M \to M$, которое назовем связностью. При этом должны выполняться условия:

[1] e-mail: sechkin@omgpu.omsk.edu

1) $M_{-1} = \{0\}, BM_i \subset M_i$ для всех i; $\bigcup_{i=0}^{n} M_i = M$;

2) для каждого $i \geq -1$ фактор M_{i+1}/M_i есть свободный B-модуль с одной образующей; e является свободной образующей M_0;

3) $\forall b \in B \forall m \in M : \nabla(bm) = (\partial b)m + b(\nabla m)$;

4) при каждом $i > -1$ $\nabla M_i \subset M_{i+1}$ и отображение $\nabla : M_i \to M_{i+1}$ при $i \geq 0$ индуцирует изоморфизм одномерных B-модулей: $M_i/M_{i-1} \to M_{i+1}/M_i$.

Элемент $e = 1$ будем называть функцией Бейкера-Ахиезера.

Для построения решения уравнения Лакса в модуле M надо задать дополнительную структуру.

Пусть O - некоторое коммутативное кольцо, содержащее поле k. KD-модуль M называется KD-бимодулем, если он является правым O-модулем, причем выполнены условия;

5) действия B и O коммутируют, т.е. $(bm)\varphi = b(m\varphi)$, где $b \in B, \varphi \in O$ и $m \in M$. Если $\lambda \in k \subset O$, то $m\lambda = \lambda m$ для $m \in M$;

6) $\nabla(m\varphi) = (\nabla m)\varphi$ для любого $\varphi \in O$ и $m \in M$;

7) для любого $\varphi \in O$ элемент $e\varphi \neq 0$.

Рассмотрим теперь уравнение Лакса

$$L_t = [L, P], \tag{1}$$

где $[L, P] = P \circ L - L \circ P$ - коммутатор операторов L и P, $L = \partial^4 + v\partial^2 + w\partial + z$, $P = b^{-1}\omega\partial^2 + c\partial + u$; $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$ - оператор дифференцирования по переменной x; v, u, w, z - функции двух переменных

x, t, которые достаточно гладкие; ω, b, c - вещественные постоянные.

Ранг уравнения (1), т.е. наибольший общий делитель порядков операторов L и P, равен 2.

Вычисляя коммутатор $[L, P]$ и исключая функцию $u(x,t)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b\omega^{-1}v_t = 2v_{xx} - 2w_x - bc\omega^{-1}v_x \\ b\omega^{-1}w_t = -w_{xx} + 2v_{xxx} + vv_x - bc\omega^{-1}w_x - 2z_x \\ b\omega^{-1}z_t = \frac{1}{2}v_{xxxx} + \frac{1}{2}vv_x - z_{xx} + \frac{1}{2}v_x w - bc\omega^{-1}z_x \end{cases} \tag{2}$$

Неизвестные функции v, w, z можно выразить через компоненты функции Бейкера-Ахиезера (возьмем $N = 1$, т. е. будем искать односолитонное решение), которая имеет вид

$$\mathit{1} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для этого в бимодуле M, соответствующем векторному расслоению над рациональной кривой с двойной точкой с разделенными касательными, решим уравнения:

$$\tilde{L}\,\mathit{1} = \mathit{1}\varphi$$
$$\tilde{P}\,\mathit{1} = \nabla_2\,\mathit{1},$$

где

$\tilde{L} = L(\nabla_1)$, $\tilde{P} = P(\nabla_1)$, $\nabla_j = \partial_j + d_j(\lambda)$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial t}$, $d_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $d_2(\lambda) = \omega\lambda E_2 + cd_1(\lambda)$, E_2 - единичная матрица 2-го порядка, $\varphi = b^2(\lambda^2 - 2\alpha_0\lambda)$.

Приравнивая в уравнении $\tilde{L}\,\mathit{1} = \mathit{1}\varphi$ столбцы при одинаковых степенях λ, получим систему

$$\begin{cases} v = -4\mu_{2x} - 2b^2\alpha \\ w = -6\mu_{2xx} - 4b\mu_{2x} - v\mu_2 - 2b\alpha\mu_2 \\ z = -4\mu_{2xxx} - 6b\mu_{1xx} - 4b\mu_{4x} - \\ -v(2\mu_{2x} + b\mu_1) - w\mu_2 - 2b^2\alpha\mu_1. \end{cases} \tag{4}$$

Аналогично из уравнения $\tilde{P}\,\mathit{1} = \nabla_2\,\mathit{1}$

найдем, что

$$u = -2\omega b^{-1}\mu_{2x}. \tag{5}$$

Коэффициенты μ_1 и μ_2 найдем из матричного уравнения

$$(E_2 - g)\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + (\alpha E_2 - \beta g)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{6}$$

полученного применением определения бимодуля M к функции Бейкера-Ахиезера, где матрица склейки $g(x,t) = e^{h(\beta)} \cdot g_0 \cdot e^{-h(\alpha)}$, α и β - параметры двойной точки, $h(\lambda) = xd_x(\lambda) + td_t(\lambda)$, матрица $g_0 = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbf{C})$ - невырожденная матрица с комплексными коэффициентами.

Вычислим матрицу склейки

$$g(x,t) = e^{\omega t(\beta - \alpha)}(\tilde{g}_{mn});$$

получаем (промежуточные выкладки опускаем ради краткости изложения):

$$\tilde{g}_{11} = g_1 ch c\xi cos a\xi + \frac{1}{a}g_2 ch c\xi sin a\xi +$$
$$+ cg_3 sh c\xi cos a\xi + \frac{c}{a}g_4 sh c\xi sin a\xi;$$
$$\tilde{g}_{12} = -ag_1 ch c\xi sin a\xi + g_2 ch c\xi cos a\xi -$$
$$-cag_3 sh c\xi sin a\xi + cg_4 sh c\xi cos a\xi;$$
$$\tilde{g}_{21} = \frac{1}{c}g_1 sh c\xi cos a\xi + \frac{1}{ac}g_2 sh c\xi sin a\xi +$$
$$+ g_3 ch c\xi cos a\xi + \frac{1}{a}g_4 ch c\xi sin a\xi;$$
$$\tilde{g}_{22} = -\frac{a}{c}g_1 sh c\xi sin a\xi + \frac{1}{c}g_2 sh c\xi cos a\xi -$$
$$-acg_3 ch c\xi sin a\xi + cg_4 ch c\xi cos a\xi;$$

где $\alpha = a^2 b$, $\beta = c^2 b$, $\xi = b\bar{\xi}$, $\bar{\xi} = x + ct$.

Теперь выражаем функции μ_1 и μ_2 через элементы матрицы склейки:

$$\mu_1 = \frac{\beta g_{11} - \alpha + \alpha g_{22} - \beta det g}{det(E_2 - g)};$$

$$\mu_2 = \frac{(\beta - \alpha)g_{21}}{det(E_2 - g)}. \tag{7}$$

Подставляя формулы (7) в (4) и (5), получаем матричные солитонные решения уравнения Лакса (1), из которых, в частности, при $\alpha_0 = 0$, $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, α и β - чисто мнимые, комплексно сопряженные, можно получить один результат из работы Ю.И. Манина [5].

[1] Новиков Р.Г., Хенкин Г.М. $\bar{\partial}$-уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния // УМН. Т. 42. Вып. 3 (255). 1987. С. 93-152.

[2] Манин Ю.И. Матричные солитоны и расслоения над кривыми с особенностями // Функц. анализ. Т. 11. Вып. 4 (1978). С. 53-63.

[3] Кричевер И.М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функц. анализ. Т. 11. Вып. 1 (1977). С. 15-31.

[4] Дринфельд В.Г. О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец // Функц. анализ. Т. 11. Вып. 1 (1977). С. 11-14.

[5] Манин Ю.И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1977. Т. 11. С. 5-152.