Вестник Омского университета, 2001. №.2. С.11–13.

УДК 543.123:530.712-534.12

УСЛОВИЯ ДИСКРЕТНОСТИ ПОДГРУПП b PSL(2,C), ПОРОЖДЕННЫХ ДВУМЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ОСЯМИ

Н.А.Исаченко†, А.А.Малая‡

† *Омский государственный университет, кафедра математического анализа 644077, Омск, пр. Мира, 55-А*

‡ *Северо-Казахстанский университет, кафедра математики 642026, Петропавловск, ул. Интернациональная, 26*

Получена 15 января 2001 г.

In persisting article are received necessities a condition and sufficient condition of discrete subgroups b PSL(2,C), induced two hyperbolic elements with perpendicular axises.

Введение

В настоящей статье изучаются группы движений пространства Лобачевского, а именно, получены необходимое условие и достаточное условие дискретности подгрупп b PSL(2,C), порожденных двумя гиперболическими элементами с ортогональными осями.

Критерии дискретности подгруппы b PSL(2,C), порожденной двумя вращениями с ортогональными осями, были получены Е.Клименко [1]. Д.Деревнин и А.Медных [2] для дискретных групп движений пространства Лобачевского дали точные оценки снизу на расстояния между неподвижными точками различных типов. Позднее Геринг и Мартин [3] получили необходимое условие дискретности подгруппы b PSL(2,C), порожденной двумя вращениями, дав нижнюю оценку на расстояние между их осями.

1. Предварительные сведения

Введем необходимые в дальнейшем определения и хорошо известные результаты. В качестве модели плоскости Лобачевского будем рассматривать единичный круг в C.

$$\Delta = \{z \in C \mid \ | z |< 1\},$$

а модели гиперболического пространства – верхнее полупространство:

$$H^3 = \{(z,t) \mid z \in C, t > 0\}.$$

Известно, что группа b PSL(2,C) изоморфна группе $\mathrm{Isom}^+ H^3$ движений пространства Лобачевского.

Осью гиперболического элемента g назовем гиперболическую прямую A_g, соединяющую его неподвижные точки.

Как известно, всякое движение плоскости или пространства Лобачевского можно представить в виде композиции двух полуоборотов σ_1 и σ_2 относительно h-прямых L_1 и L_2 в H^3. Причем $\sigma_2\sigma_1$ — эллиптический, гиперболический или же параболический в зависимости от того, пересекаются, расходятся или параллельны L_1 и L_2. В случае скрещивающихся h-прямых L_1 и L_2 в H^3 элемент $\sigma_2\sigma_1$ будет локсодромическим.

Параметром элемента $g = \sigma_2\sigma_1$ назовем число $\lambda(g) = \rho + \varphi i$, где ρ – гиперболическое расстояние, φ – угол между L_1 и L_2.

Используемые в статье тригонометрические соотношения для плоскости Лобачевского можно найти в [4].

2. Достаточное условие

Теорема 1. *Пусть $g, h \in Isom^+H^3$ – гиперболические и $A_g \perp A_h$. Если $[g,\, h]$ – неэллиптический, то группа $G =< g, h >$ дискретна.*

Доказательство. Для доказательства нам необходима следующая лемма.

Лемма . *Если выполнены условия теоремы 1, то изометрические окружности I_g и I_h либо не пересекаются, либо касаются.*

Доказательство. Используя, если нужно, сопряжение, можно считать, что g – гиперболический элемент с неподвижными точками $-1, 1$, h – гиперболический элемент с неподвижными точками $-w, w$, где w – чисто мнимое число и $\mid w \mid > 1$. Тогда

$$g \sim \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\lambda(g) & \mathrm{sh}\lambda(g) \\ \mathrm{sh}\lambda(g) & \mathrm{ch}\lambda(g) \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

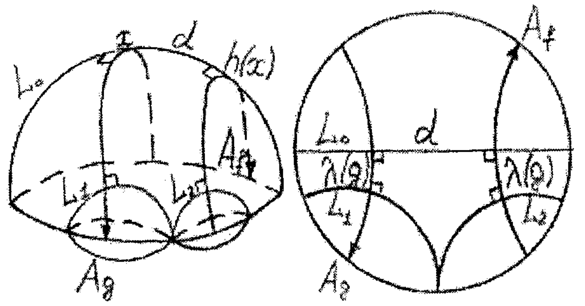
$$h \sim \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\lambda(h) & w\mathrm{sh}\lambda(h) \\ \frac{1}{w}\mathrm{sh}\lambda(h) & \mathrm{ch}\lambda(h) \end{pmatrix},$$

изометрическая окружность элемента g: $\mid z + \mathrm{cth}\lambda(g) \mid = \frac{1}{\mathrm{sh}\lambda(g)}$,
изометрическая окружность элемента h: $\mid z + w\mathrm{cth}\lambda(h) \mid = \frac{|w|}{\mathrm{sh}\lambda(h)}$.

Рассмотрим $[g,\, h] = gf$, где $f = hg^{-1}h^{-1}$. Неподвижными точками элемента f будут образы неподвижных точек элемента g относительно действия элемента h. Учитывая симметрию, видим, что точки -1, $h(-1)$, $h(1)$, 1 лежат на одной окружности O. Таким образом, эта окружность инвариантна относительно группы, порожденной элементами g и f.

Пусть L_0 – взаимный перпендикуляр к осям A_g и A_f, d – расстояние между ними. Тогда $g = \sigma_1\sigma_0$, $f = \sigma_0\sigma_2$, где $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ – полуобороты относительно прямых L_0, L_1, L_2, и $[g,\, h] = \sigma_1\sigma_2$.

Пусть Π – полусфера (гиперболическая плоскость), опирающаяся на окружность O. Заметим, что прямые L_0, L_1, L_2, A_g и A_f лежат на Π. Пусть P – вертикальная плоскость, проходящая через L_0. Тогда L_0, L_1, L_2 суть пересечения P и изометрических сфер элементов g и f с Π, соответственно.



Рассматривая ограничения g и f на гиперболическую плоскость Π, получим оценку на d. Заметим, что $\lambda(g) = \lambda(f)$. Так как $gf = \sigma_1\sigma_2$ – неэллиптический, то

$$1 = \mathrm{ch}0 \le \mathrm{sh}^2\lambda(g)\mathrm{ch}d - \mathrm{ch}^2\lambda(g) \text{ или}$$

$$\mathrm{ch}d \ge \frac{1 + \mathrm{ch}^2\lambda(g)}{\mathrm{sh}^2\lambda(g)}. \qquad (1)$$

С другой стороны, d есть расстояние между точками $x = (0, |w|)$ и $h(x)$, следовательно [4, с. 107], формула (5.4.11)]:

$$\mathrm{sh}^2\frac{d}{2} = \mathrm{sh}^2\lambda(g)\mathrm{ch}^2 l,$$

где l – расстояние между A_g и A_h. Отсюда

$$\mathrm{ch}d = 2\mathrm{sh}^2\lambda(h)\mathrm{ch}^2 l + 1. \qquad (2)$$

Подставляя в (1), получаем

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2\lambda(g)\mathrm{sh}^2\lambda(h)} \le \mathrm{ch}^2 l.$$

В нашем случае $\mathrm{ch}l = \mathrm{ch}\ln|w| = \frac{1}{2}\left(|w| + \frac{1}{|w|}\right)$. Следовательно, если gf – неэллиптический, то

$$\frac{1}{\mathrm{sh}\lambda(g)\mathrm{sh}\lambda(h)} \le \frac{1}{2}\left(\mid w \mid + \frac{1}{\mid w \mid}\right).$$

С другой стороны, если R_g и R_h радиусы I_g и I_h соответственно, то

$$\left(R_g + R_h\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2\lambda(g)} + \frac{\mid w \mid^2}{\mathrm{sh}^2\lambda(h)} + \frac{2 \mid w \mid}{\mathrm{sh}\lambda(g)\mathrm{sh}\lambda(h)} \le$$

$$\le \mathrm{cth}^2\lambda(g) + \mid w \mid^2\mathrm{cth}^2\lambda(h).$$

Справа получили квадрат расстояния между центрами I_g и I_h. Следовательно, I_g и I_h пересекаются самое большее по одной точке. Теперь доказательство теоремы непосредственно следует из леммы. Так как в этом случае $I_g, I_{g^{-1}}, I_h, I_{h^{-1}}$ – четыре внешних одна относительно другой окружности в C, для которых g отображает внешность $I_{g^{-1}}$ на внутренность I_g, а h – внешность $I_{h^{-1}}$ на внутренность I_h. Тогда группа $G =< g, h >$ является группой Шоттки или группой типа Шоттки.

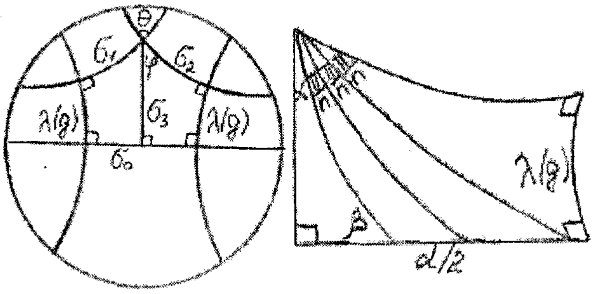
3. Необходимое условие

Теорема 2. *Пусть* $g, h \in Isom^{+}H^3$ *- гиперболические и* $A_g \perp A_h$. *Если группа* $G =< g, h >$ *дискретна, то*

$$ch^2\rho\left(A_g, A_h\right) \geq \frac{1}{sh^2\lambda(g) sh^2\lambda(h)}\left(1-4ch^2\lambda(g)\sin^2\frac{\pi}{7}\right).$$

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные в начале доказательства леммы из теоремы 1, видим, что мы находимся в ситуации, которая изображена на рисунке, где

$$g = \sigma_1\sigma_0, \quad hg^{-1}h^{-1} = \sigma_0\sigma_2, \quad [g, h] = \sigma_1\sigma_2.$$



Если $[g, h]$ – неэллиптический, то из теоремы 1 следует, что G дискретна. Осталось рассмотреть случай, когда $[g, h]$ – эллиптический.

Если $G =< g, h >$ дискретна, то $H_1 =< g, hg^{-1}h^{-1} >$ дискретна. Таким образом, наша задача – найти необходимое условие дискретности группы H_1.

Рассмотрим группу $H_2 =< \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 >$. Группы H_1 и H_2 дискретны или же недискретны одновременно. В свою очередь H_2 дискретна одновременно с $H_3 =< \sigma_0, \sigma_2, \sigma_3 >$, где σ_3 – биссектриса угла θ.

Возможны следующие случаи:

1) φ – иррациональный, то есть $\varphi = t\pi$, где $t \notin Q$, тогда H_3 недискретна и, следовательно, G недискретна.

2) $\varphi = \frac{\pi}{n}$, $n \in N, n \geq 3$, в этом случае выполнены условия теоремы Пуанкаре о фундаментальном многоугольнике [4, с. 224, теорема (9.8.4)] и H_3 дискретна, а поэтому и G дискретна. В этом случае имеет место оценка

$$\mathrm{ch}d \geq \frac{1}{2\mathrm{sh}^2\lambda(g)} + 1. \tag{3}$$

3) $\varphi = \frac{k\pi}{n}$, $k, n \in N, k < n$, тогда разделим угол φ на k равных частей и обозначим $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Из результата Мательски [5] следует, что в этом случае, если H_3 дискретна, то либо $\beta = \frac{\pi}{l}$, $l \in N, l \geq 3$, либо $\beta = \frac{2\pi}{n}$, $n \geq 7, n$ – четное.

Для $\alpha = \frac{\pi}{n}, \beta = \frac{\pi}{l}, n, l \in N$, имеет место оценка:

$$\mathrm{ch}d \geq \frac{2}{\mathrm{sh}^2\lambda(g)}\left(1 - 4\mathrm{ch}^2\lambda(g)\sin^2\frac{\pi}{7}\right) + 1, \tag{4}$$

а при $\alpha = \frac{\pi}{n}$, $\beta = \frac{2\pi}{n}$, $n \in N$

$$\mathrm{ch}d \geq \frac{2}{\mathrm{sh}^2\lambda(g)}\left(1 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{ch}^2\lambda(g)\right) + 1. \tag{5}$$

Из $(3), (4), (5)$ следует, что в общем случае

$$\mathrm{ch}d \geq \frac{2}{\mathrm{sh}^2\lambda(g)}\left(1 - 4\mathrm{ch}^2\lambda(g)\sin^2\frac{\pi}{7}\right) + 1. \tag{6}$$

Комбинируя (2) и (6), получаем

$$\mathrm{ch}^2\rho\left(A_g, A_h\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\mathrm{sh}^2\lambda(g)\mathrm{sh}^2\lambda(h)}\left(1 - 4\mathrm{ch}^2\lambda(g)\sin^2\frac{\pi}{7}\right). \tag{7}$$

Замечание . Можно считать, что $\lambda(g) \leq \lambda(h)$. В формуле (7) скобка, стоящая в правой части, должна быть положительной, откуда имеет смысл рассматривать $\lambda(g)$ такие, что

$$1 \leq \mathrm{ch}\lambda(g) < \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}} \approx 1,152.$$

---

[1] Клименко Е.Я. О дискретных группах в трехмерном пространстве Лобачевского, порожденных двумя вращениями // Сиб. мат. жур. 1989. Т. 30. №1. С. 123-128.

[2] Деревнин Д.А., Медных А.Д. Геометрические свойства дискретных групп, действующих с неподвижными точками в пространстве Лобачевского // Доклады АН СССР. 1988. Т. 300. №1. С. 27-30.

[3] Gehring F.W., Martin G.J. Commutators, collars and the geometry of Möbius groups // J. D'Analyse Math. 1994. V. 63. P. 175-219.

[4] Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.

[5] Matelski J.P. The classification of discrete 2 - generator subgroups of b PSL(2, R) // Israel J. Math. 1982. V. 42. №4. P. 309-317.