§5. Текстовые задачи на составление уравнений

При всем многообразии большинство текстовых задач относится к одному из следующих типов: задачи на движение, работу, смеси и концентрации, сложные проценты, прогрессии. Именно подобным задачам и будет уделено основное внимание. При их решении выделяются три этапа: составление математической модели в форме системы уравнений и неравенств, затем решение этой системы и, наконец, анализ полученного решения. Мы подробно остановимся на первом этапе решения, оставляя в тени второй и третий как хорошо известные. Сложность действий на первом этапе вызвана отсутствием общего алгоритма в построении математической модели. Поэтому предлагается некоторый универсальный подход, призванный облегчить решение данной задачи.

Каждая текстовая задача строится следующим образом: в задаче выделяются субъекты или участники, а условие задачи фактически описывает поведение этих субъектов в различных ситуациях. Таким образом, построение модели основано на исследовании поведения участников в разных ситуациях. Предлагаемый алгоритм основан на описании данного поведения в сжатом виде в форме таблицы, создаваемой для каждой ситуации. Строится такая таблица с учетом основной формулы или формул, определенных типом задачи.

Кратко алгоритм решения текстовой задачи теперь можно описать следующим образом.

1. Выделяются ситуации и участники каждой ситуации.
2. Для каждой ситуации строится таблица, строки которой – участники, а столбцы – параметры их поведения.
3. По условиям задачи заполняются все таблицы по правилам: если соответствующий параметр задан в условии задачи, в таблицу вносится его значение; если он просто выражается через уже введенные значения – в таблицу вносится это выражение; в противном случае вводится новая переменная.
4. Составляется система на основе анализа построенных таблиц и условий задачи.
5. Решается система.
6. Полученные решения проверяются и анализируются на основе условий задачи.

Опишем соответствующие таблицы для задач первых четырех типов.

5.1. Задачи на равномерное движение.

В задачах данного типа поведение каждого участника описывается тремя параметрами: скорость (V), время (T), путь (S). Основная формула равномерного движения имеет вид **VT=S**. Основной принцип в выделении ситуаций – все ее участники должны сохранять постоянную скорость.

Пример 1. Одновременно из пункта A выехали два автомобиля: первый со скоростью 80 км/ч, а второй – 60 км/ч. Через полчаса за ними отправился третий автомобиль, который догнал первого на 1 час 15 минут позже, чем второго. Найти скорость третьего автомобиля.

Решение. В данной задаче четко выделяются три участника и две ситуации. Первая ситуация описывает совместное движение первого и третьего автомобилей, другая – второго и третьего.

	скорость	Время	Путь
1	80	T	80t
3	x	t-1/2	X(t-1/2)
	скорость	**Время**	**Путь**
2	60	t-5/4	60(t-5/4)
3	x	t-1/2-5/4	x(t-1/2-5/4)

$\begin{cases} 80t = x(t-1/2) \\ 60(t-5/4) = x(t-1/2-5/4) \end{cases}$, найти x. Из требования задачи получаем следующий план решения системы. Из первого уравнения выражаем t, подставляем это выражение во второе уравнение и находим из него x.

Ответ: 100 км/час.

Пример 2. Из А в В вниз по реке отправился плот, и одновременно с ним из В в А лодка, которая встретилась с плотом через 2 часа. Доплыв до А, лодка сразу повернула обратно и вернулась в В в тот момент, когда плоту оставалось проплыть еще четверть пути. Сколько времени плывет плот из А в В?

Решение. Задачи, связанные с движением по реке, должны учитывать две скорости - скорость субъекта и скорость течения реки. В данной задаче скорость плота и является скоростью течения реки. Кроме плота, в задаче действует лодка. Учитывая требование постоянства скорости, мы получаем три ситуации: движение от начала до первой встречи, движение от первой встречи до прибытия лодки в пункт А и движение до прибытия лодки в пункт В. Наконец, ввиду отсутствия в условиях конкретных единиц длины и скорости, расстояние от А до В можем взять равным 1.

	Скорость	Время	Путь
Плот	x	2	2x
Лодка	y-x	2	2(y-x)
	Скорость	Время	Путь
Плот	x	t	xt
Лодка	y-x	t	t(y-x)
	Скорость	Время	Путь
Плот	x	z	xz
Лодка	y+x	z	1

$$\begin{cases} 2x+2(y-x)=1 \\ 2x=t(y-x) \\ z(y+x)=1 \\ 2x+tx+zx=\dfrac{3}{4} \end{cases}, \text{ найти } \frac{1}{x}.$$

Схема решения системы такова: последовательно исключаются все неизвестные, кроме x. В итоге получаем

Ответ: 6 часов.

5.2 Задачи на работу.

Данный тип задач очень похож на предыдущий. Основные параметры – производительность (P), время работы (T), объем работы (A). Основная формула имеет вид **PT=A**. В задачах на работу часто объем всей работы принимается за 1, что упрощает решение.

Пример 3. За 4 дня совместной работы двух бригад было выполнено 2/3 задания. Первая бригада может выполнить все задание на 5 дней быстрее, чем вторая. За сколько дней может выполнить все задание каждая бригада в отдельности?

Решение. В данной задаче явно выделяются две ситуации: совместная работа двух бригад и выполнение всего задания в отдельности. Составим таблицы для каждой ситуации:

	Производительность	Время	Объем
1	x	4	4x
2	y	4	4y

	Производительность	Время	Объем
1	x	1/x	1
2	y	1/y	1

Теперь система получается следующая:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 2/3 \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} - 5 \end{cases}$$

, найти 1/x и 1/y. Решая систему, получаем x=1/5 и y=1/10 .

Ответ: первая бригада выполнит все задание за 5 дней, а вторая – за 10 дней.

Пример 4. Две трубы, работая вместе, наполняют бассейн за 12 часов. Первая труба наполняет бассейн на 10 часов быстрее, чем вторая. За сколько часов наполнит бассейн каждая труба?

Решение. Здесь мы имеем две ситуации: совместная работа двух труб и наполнение бассейна каждой трубой в отдельности.

	Производительность	Время	Объем
1	x	12	12x
2	y	12	12y

	Производительность	Время	Объем
1	X	1/x	1
2	Y	1/y	1

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 12x + 12y = 1 \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} - 10 \end{cases}$$

, найти 1/x и 1/y. Решая ее, получаем x=1/20, y=1/30.

Ответ: Первая труба наполнит бассейн за 20 часов, а вторая – за 30 часов.

5.3. Задачи на смеси и концентрации. Основные параметры – масса целого (раствора, смеси и т.д.) (М), масса каждой части (m), концентрация (с) или процентное содержание каждой части (С). Основные формулы: **Мс=m, МС=100%m**.

Пример 5. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее неочищенный металл – 4% примесей. Сколько неочищенного металла получится из 24 тонн руды?

Решение. В данной задаче ровно одна ситуация, таблица для которой выглядит так:

	Масса смеси	Концентрация чистого металла	Масса неочищенного металла
Руда	24 тонны	0,6	14,4 тонны
Металл	x	0,96	0,96x

$0{,}96\ x = 14{,}4$. В итоге получаем

Ответ: 15 тонн металла.

Пример 6. Для приготовления уксуса в сосуд, содержащий 12 литров 100% эссенции, долили 20 литров воды (уксус – это раствор эссенции в воде). В другом сосуде содержалось 9 литров эссенции на 4 литра воды. Сколько литров уксуса нужно перелить из первого сосуда во второй, чтобы получить 50%-й раствор уксуса?

Решение. В данной задаче выделяются три ситуации: определение концентрации первого раствора, определение концентрации второго раствора, смешивание первого и второго раствора.

	Масса уксуса	Концентрация	Масса эссенции
1 раствор	32	x	12

	Масса уксуса	Концентрация	Масса эссенции
2 раствор	13	y	9

	Масса уксуса	Концентрация	Масса эссенции
Раствор 1	Z	x	zx
Раствор 2	13	y	13y
Раствор 1+2	z+13	0,5	zx+13y

$$\begin{cases} 32x=12 \\ 13y=9 \\ (z+13)\cdot 0{,}5=zx+13y \end{cases}$$, найти Z.

Найдя из первых двух уравнений x и y, получаем из третьего уравнения

Ответ: 20 литров.

Необходимо отметить, что если таблица заполнялась по строкам, то уравнение получается при анализе столбцов, и наоборот, если таблица заполнялась по столбцам, уравнение выписывается при анализе строк.

5.4. Задачи на сложные проценты.

Основные параметры в задачах этого типа – начальное значение величины (X_0), абсолютное изменение величины (ΔX), процентное или долевое изменение величины (α), конечное значение величины (X_1). Основными являются следующие формулы: $X_1 - X_0 = \Delta X$, $\Delta X = \alpha X_0$ для долевого изменения и $\Delta X = \alpha X_0 / 100\%$ для процентного. Часто удобнее эти формулы объединять в одну $X_1 = X_0(1+\alpha)$, если α - долевое изменение, и $X_1 = X_0(1+\alpha/100\%)$, если α - процентное изменение. При заполнении таблицы нужно учитывать следующее часто встречающееся обстоятельство. Если величина изменяется несколько раз, то начальное значение каждого нового изменения есть конечное значение величины в предыдущем изменении. Ниже - пример таблицы при двойном изменении величины.

Пример 7. Цену товара сначала снизили на 20%, затем на 15% и еще раз на 10%. На сколько процентов снизилась первоначальная цена?

Решение. Троекратное снижение цен указывает на необходимость построения трех таблиц.

X_0	α **процентное**	α **долевое**	$\Delta X = \alpha X_0$	X_1
1	20%	0,2	0,2	0,8
0,8	15%	0,15	0,12	0,68
0.68	10%	0,1	0,068	0,612

Теперь полное снижение цены можно найти по формуле $\alpha = \dfrac{X_1 - X_0}{X_0} \cdot 100\%$.

Отсюда получаем

Ответ: на 38,8%.

Пример 8. Капитал в 10650 рублей разделен на две части, одна из которых приносит прибыль 5%. Сколько процентов прибыли дает другая часть, если обе части дают одинаковый доход, а весь капитал приносит 690 рублей прибыли?

Решение. Помня, что прибыль – абсолютное изменение величины, а доход – конечное значение, построим таблицы для каждой части и всего капитала, а затем – систему уравнений.

X_0	α долевое	α процентное	$\Delta X = \alpha X_0$	X_1
x	0,05	5%	0.05x	1,05x
y	z	100z%	zy	y(1+z)
10650	*	*	690	*

Несущественные параметры в таблице отмечены *. По условиям задачи составляем систему.

$$\begin{cases} x+y=10650 \\ 0,05x+zy=690 \\ 1,05x=y(1+z) \end{cases}$$, найти 100z%.

Решая систему, получаем

Ответ: 8%.

5.5. Прогрессии.

Решение задач на прогрессии обычно не требует никаких дополнительных ухищрений для составления системы, так как условия таких задач обычно касаются либо членов прогрессии, либо суммы некоторых членов прогрессии, а все эти условия являются формульными.

5.5.1. Арифметическая прогрессия – последовательность чисел, у которой каждый последующий член отличается от предыдущего на одну и ту же величину, называемую разностью прогрессии.

Основные формулы: $a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ или $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Здесь a_n – n-й член прогрессии, a_1 – 1-й член прогрессии, S_n- сумма первых n членов, d- разность прогрессии. Как следствие определения получаем следующее условие: три числа a, b, c в данном порядке образуют арифметическую прогрессию, если среднее число есть среднее арифметическое крайних чисел, то есть $b = \frac{a+c}{2}$.

5.5.2. Геометрическая прогрессия – последовательность чисел, у которой отношение последующего члена к предыдущему, называемое знаменателем прогрессии, есть величина постоянная.

Основные формулы: $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{!-q}$. Здесь b_n – n-й член прогрессии, S_n – сумма первых n членов, b_1 – первый член прогрессии. Как следствие определения получаем следующее условие: три числа a, b, c в данном порядке образуют геометрическую прогрессию, если среднее число есть среднее геометрическое крайних чисел, то есть $b = \sqrt{ac}$.

Пример 9. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 40, а четвертый в три раза больше второго. Чему равен второй член?

Решение. Используя формулы арифметической прогрессии, получаем систему

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 3(a_1 + d \\ \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 40 \end{cases}$$, найти $a_1 + d$.

Решая систему, получаем $a_1 = 0, d = 4$.

Ответ: 4.

Пример 10. Разность между пятым и третьим членами геометрической прогрессии в четыре раза больше разности между третьим и первым, четвертый член больше третьего и равен произведению третьего на второй. Найдите сумму первых трех членов.

Решение. Используя формулы геометрической прогрессии, получаем систему

$$\begin{cases} b_1 q^4 - b_1 q^2 = 4\left(b_1 q^2 - b_1\right) \\ b_1 q^3 = b_1 q^2 \cdot b_1 q \\ b_1 q^3 > b_1 q^2 \end{cases}, \text{ найти } S_3 = \frac{b_1\left(1-q^3\right)}{1-q}.$$

Решая систему, получаем $b_1 = 1, q = 2, S_3 = 7$.

Ответ: 7.

Задания для самостоятельной работы

1. Бригада собрала урожай с трех полей. Площадь первого поля равна 1/3 площади всех полей, а площадь второго составляет 120 % от площади третьего. Третье поле на 9 га меньше первого. Сколько гектаров составляют все три поля?

2. Лыжник рассчитал, что, если он будет ехать со скоростью 6 км/час, то придет к месту встречи с опозданием на 20 мин. Если он увеличит скорость на 3 км/час, то придет на 30 мин раньше. Какое расстояние должен был пройти лыжник?

3. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену – еще на 16% и, наконец, произвели снижение еще на 5%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

4. Из 40%-го раствора поваренной соли испарилось 2/3 имеющейся в растворе воды. Какова концентрация получившегося раствора?

5. На заводе в трех цехах работают 308 человек. В первом цехе рабочих вдвое больше, чем во втором, а в третьем - на 25% больше, чем в первом. Сколько рабочих во втором цехе?

6. Расстояние между двумя речными причалами 90 км. Теплоход на весь рейс туда и обратно затрачивает 7,5 ч. Найти скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 20% от скорости теплохода.

7. Компания "УПЕР" обещает вкладчикам 260% годовых. На сколько рублей увеличится сумма вклада через три месяца, если первоначальная сумма равнялась 500000 рублей?

8. Кусок сплава меди и серебра массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому, чтобы полученный сплав содержал 60% меди?

9. Через 2,5 часа после того, как выехал велосипедист, в том же направлении выехал автомобиль со скоростью 80 км/час. Через какое время автомобиль догнал велосипедиста, если скорость велосипедиста составляет 25% скорости автомобиля?

10. За три месяца три бригады изготовили 258 деталей. Первая бригада изготовила 3/4 числа деталей, изготовленных второй, и на 20% деталей меньше, чем третья бригада. Сколько деталей изготовила первая бригада?

11. Фирма "СДР" обещает вкладчикам 7 рублей на каждую полную тысячу рублей в день. На сколько увеличится сумма вклада через 2 дня, если первоначальный вклад равнялся 2 млн. рублей?

12. При выпаривании из 8 кг рассола получили 2 кг пищевой соли, содержащей 10% воды. Каков процент содержания воды в рассоле?

13. В бак проведены две трубы – подающая и отводящая, причем наполнение длится на два часа дольше, чем опорожнение. При заполненном на 1/3 баке были открыты обе трубы, и он оказался пустым через 8 часов. За какое время подающая труба наполняет бак?

14. Имеется два раствора поваренной соли разной концентрации. Если слить вместе 100 г первого раствора и 200 г второго, то получится 50%-й раствор. Если же слить 300 г первого раствора и 200 г второго, то получится 42%-й раствор. Определить концентрации данных растворов.

15. Стадо оленей увеличивается в результате естественного прироста и приобретения новых оленей. В начале первого года было 3000 оленей, и в конце года было куплено 700 голов. Еще через год стало 4400 оленей. Каков процент естественного прироста стада ?

16. По окружности длиной 150 м равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 10 сек. быстрее другой. Найти их скорости, если совпадения точек происходят каждую минуту.

17. Найти третий член арифметической прогрессии, если сумма ее первых шести членов равна 36, а разность прогрессии равна 2.

18. Найти четвертый член геометрической прогрессии, если сумма первого и третьего членов равна 3, третьего и пятого равна 6, а знаменатель прогрессии меньше 1.

19. Найти первый член арифметической прогрессии, если сумма первых трех членов равна 9, а первых четырех равна 16.

20. Сумма первого и четвертого членов геометрической прогрессии равна 9, а пятый член в 8 раз больше второго. Найти первый член прогрессии.

Ответы к задачам § 5

1. 297 га
2. 15 км
3. 36.16%
4. 200/3%
5. 56
6. 25 км/час
7. 325000 руб.
8. 3,5 кг
9. 50 мин
10. 72
11. 28098 руб.
12. 77.5%
13. 8 часов
14. 30% и 40%
15. 10%
16. 5 м/с и 7,5 м/с
17. 5
18. $-2\sqrt{2}$
19. 1
20. 1