§4. Тригонометрия

На координатной плоскости Oxy рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть $M(x;y)$ – точка данной окружности и $\bar{r}(x;y)$ – вектор $\overline{OM}$.

За угол между вектором $\bar{r}$ и осью Ox принимается угол α, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox до вектора $\bar{r}$. Причем α называется положительным углом. Если угол между вектором $\bar{r}$ и осью Ox отсчитывается по часовой стрелке, то такой угол называется отрицательным.

Угол измеряется положительным числом, если он положительный, и отрицательным числом, если он отрицательный.

Таким образом, измеряя углы между вектором $\bar{r}$ и осью Ox, мы можем получить числа от -360 до 360 при градусной мере угла и от -2π до 2π при радианной.

Определение. Пусть угол между вектором $\bar{r}$ и осью Ox равен α. Тогда ордината y вектора $\bar{r}$ называется синусом угла α и обозначается $\sin\alpha$, а абцисса x – косинусом угла α и обозначается $\cos\alpha$.

Так как при повороте на угол кратный 2π вектор $\bar{r}$ переходит в себя, полагают $\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha$ и $\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha$ для всех целых n.

Множество всех целых чисел обозначим через Z.

Определение. Тангенсом угла α называется отношение синуса этого угла к косинусу и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Котангенсом угла α называется отношение косинуса этого угла к синусу и обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

4.1. Свойства тригонометрических функций.

1. Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены при всех вещественных α, функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена при всех $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, и функция $\operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha\neq\pi n, n\in Z$.

2. Функция $\cos\alpha$ является четной, а функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ являются нечетными.

3. Тригонометрические функции являются периодическими, причем период $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ равен 2π, а период функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ равен π.

4. Область значений функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ является отрезком $[-1;1]$, а функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ могут принимать любые значения.

4.2. Основные тригонометрические формулы.

1. Основные тождества:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,\ 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

2. Функции двойного аргумента: $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

3. Формулы понижения степени: $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$, $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$.

4. Формулы суммы аргументов:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

5. Формулы суммы функций:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$,
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

6. Формулы произведения функций:

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$, $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$,
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.

Примеры решения задач.

Пример 1. Вычислить $5\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,135^\circ \sin 210^\circ \cos 225^\circ$.

Используя формулы суммы аргументов, получим

$$5\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}(90^\circ+45^\circ)\sin(180^\circ+30^\circ)\cos(180^\circ+45^\circ) = -5\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,45^\circ \sin 30^\circ \cos 45^\circ = -\frac{5}{2}.$$

Пример 2. Упростить выражение $\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta)^2}{1+\cos(\alpha-\beta)}$.

Используя основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса разности двух углов, получим

$$\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)^2 + (\cos\alpha+\cos\beta)^2}{1+\cos(\alpha-\beta)} = \frac{2+2\sin\alpha\sin\beta+2\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta} = 2.$$

Пример 3. Доказать тождество $3\,\mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,x = \frac{4\sin 3x}{\cos x - \cos 3x}$.

Преобразуем левую часть тождества

$$3\,\mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,x = \frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x}.$$

С другой стороны, правая часть тождества равна

$$\frac{4\sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = \frac{4(\sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x)}{-2\sin 2x\sin(-x)} = \frac{2(2\sin x\cos^2 x + \cos^2 x\sin x - \sin^3 x)}{\sin 2x\sin x} =$$

$$= \frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x}.$$

Мы убедились, что левая и правая части тождества принимают одинаковые значения для всех x из ОДЗ и, следовательно, тождество доказано.

4.3. Обратные тригонометрические функции.

Определение. Пусть $|x| \le 1$. Арксинусом числа x называется угол α, из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x. Данный угол обозначается $\arcsin x$. Арккосинусом числа x называется угол α, из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен x. Данный угол обозначается $\arccos x$.

Определение. Арктангенсом числа x называется угол α, из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x. Данный угол обозначается $\operatorname{arctg} x$. Арккотангенсом числа x называется угол α, из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен x. Данный угол обозначается $\operatorname{arcctg} x$.

4.4. Свойства обратных тригонометрических функций.

1. $\sin(\arcsin x) = x, |x| \le 1; \cos(\arccos x) = x, |x| \le 1; \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.
2. $\arcsin(\sin x) = x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; \arccos(\cos x) = x, 0 \le x \le \pi;$

   $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, 0 < x < \pi$.
3. Функции $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ нечетные.
4. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x; \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
5. Функции $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ – возрастающие, а функции $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ – убывающие.
6. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Примеры решения задач.

Пример 4. Найти $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$.

Пусть $\alpha = \arccos\frac{1}{9}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{9}$ и $0 \le \alpha \le \pi$. Используя формулу понижения степени, получим

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{9}}{2}} = \pm\frac{2}{3}.$$

Так как угол $\frac{\alpha}{2}$ лежит в первой четверти, то $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$.

Пример 5. Найти $\arcsin(\cos 5)$.

Последовательно преобразуя выражение, получим

$$\arcsin(\cos 5) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5\right)\right) = \arcsin\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5 + \pi\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(5 - \frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Так как $0 < 5 - \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, то по свойству арксинуса $\arcsin(\cos 5) = 5 - \frac{3\pi}{2}$.

4.5. Решение простейших тригонометрических уравнений.

1. $\sin x = a, |a| \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$.
2. $\cos x = a, |a| \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.
3. $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$.
4. $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$.

4.6. Решение простейших тригонометрических неравенств.

1. $\sin x \le a, |a| \le 1 \Leftrightarrow \pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$;

$\sin x \ge a, |a| \le 1 \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$.

2. $\cos x \le a, a \le 1 \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z$;

$\cos x \ge a, |a| \le 1 \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n \le x \le \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

3. $\operatorname{tg} x \le a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$;

$\operatorname{tg} x \ge a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n \le x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

4. $\operatorname{ctg} x \le a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi n \le x < \pi + \pi n, n \in Z$;

$\operatorname{ctg} x \ge a \Leftrightarrow \pi n < x \le \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$.

Пример решения задачи.

Пример 6. Решить неравенство $1 + \cos x < \sin x$.

Преобразуя исходное неравенство к простейшему и применяя соответствующую формулу, получим

$$\sin x - \cos x > 1 \Leftrightarrow \quad 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in Z$$

4.7. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.

В курсе элементарной математики рассматриваются главным образом уравнения и неравенства, которые как-либо могут быть сведены к простейщим или имеют тип простейших.

В процессе решения надо внимательно следить за равносильностью переходов. так как некоторые тождественные преобразования сужают ОДЗ.

При преобразованиях уравнений и неравенств нужно стремиться либо разложить тригонометрическое выражение на множители, либо представить это выражение в виде функции от одной тригонометрической функции одного аргумента. Если последнее удалось, то тригонометрическое уравнение (неравенство) с помощью замены сводится к алгебраическому. Последним шагом всегда является решение простейших уравнений или неравенств.

При выписывании ответа необходимо проверить попадание решений в ОДЗ.

Примеры решения задач.

Пример 7. Решить уравнение $\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

ОДЗ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Пользуясь определением тангенса и формулой понижения степени, получим $\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} - (1-\cos x) = 0 \Leftrightarrow (1-\cos x)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$. Откуда $x = 2\pi n, n \in Z$ и $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. Все найденные значения неизвестного входят в ОДЗ. Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z$ и $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $\cos 2x + 2a\cos x = 5 - 4a$ имеет хотя бы один корень?

Заменяя $\cos 2x$ на $2\cos^2 x - 1$ и делая замену $t = \cos x$, получим квадратное уравнение $2t^2 + 2at + 4a - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + at + 2a - 3 = 0$. Квадратное уравнение имеет решение только в том случае, если его дискриминант неотрицательный, т.е. $D = a^2 - 4(2a-3) = a^2 - 8a + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq 2, \\ a \geq 6 \end{array}\right.$.

Условие существования решения у исходного уравнения равносильно тому, что хотя бы один из корней квадратного уравнения по модулю не превосходит 1. Поэтому нам нужно решить две системы неравенств и объединить их решения. А именно:

$$\left[\begin{array}{l} -1 \leq \dfrac{-a-\sqrt{a^2-8a+12}}{2} \leq 1, \\ -1 \leq \dfrac{-a+\sqrt{a^2-8a+12}}{2} \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ \dfrac{2}{3} \leq a \leq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq a \leq 2.$$

Ответ: $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$.

Если при решении уравнения совершались действия, которые могли привести к появлению посторонних корней (например, возведение в квадрат), то необходима проверка.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} = \sin x + \cos x$.

ОДЗ $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg} x \neq 1 \end{cases}$.

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1+\sin 2x$. Заметим, что $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\operatorname{tg} x\cos^2 x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Сделаем в уравнении замену $t=\operatorname{tg} x$.

Получим $\frac{1+t}{1-t}=1+\frac{2t}{1+t^2}\Rightarrow(1+t)(1+t^2)-(1-t)(1+t)^2\Rightarrow 2(1+t)t^2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1,\\ t=0\end{array}\right.$.

Из первого уравнения $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$ и из второго $x=\pi n, n\in Z$.

Делая проверку, отбрасываем посторонние корни $x=\pi(2n+1), n\in Z$.

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $x=2\pi n, n\in Z$.

4.8. Некоторые из наиболее часто встречающихся типов уравнений.

1. Уравнения с четными степенями синуса и косинуса, которые решаются с использованием формул понижения степени.

2. Уравнения с "далекими" аргументами, при решении которых используются формулы суммы и произведения функций.

3. Однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнения, которые решаются с помощью замены $t=\operatorname{tg} x$.

4. Уравнения, зависящие от суммы $\sin x+\cos x$ (или разности $\sin x-\cos x$) и произведения $\sin x\cdot\cos x$, которые решаются с помощью замены $t=\sin x\pm\cos x$ (тогда $\sin x\cdot\cos x=\pm\frac{1}{2}(t^2-1)$).

Примеры решения задач.

Пример 10. Решить уравнение $(\sin 7x+\cos 7x)^2=2\sin^2 11x$.

Применяя основное тригонометрическое тождество, формулы синуса двойного угла и понижения степени, получим

$$\sin 14x=-\cos 22x\Leftrightarrow\cos 22x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-14x\right)=0\Leftrightarrow 2\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(18x-\frac{\pi}{4}\right)=0 .$$

Решая простейшие уравнения, находим $4x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ и $18x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$. Окончательно получаем $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$ и $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{18}, n\in Z$.

Пример 11. Найти решение уравнения $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0$, лежащее в интервале $\left(\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3}\right)$.

Применяя основное тригонометрическое тождество, получим однородное уравнение $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$. Так как $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ не являются решениями, то, разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ и сделав замену $t=\operatorname{tg} x$.

получим квадратное уравнение $t^2-3t+2=0$. Следовательно, $t=1$ и $t=2$. Откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ и $x=\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z$.

Заметим, что $\operatorname{arctg}2>\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. Поэтому из найденных решений только одно принадлежит указанному интервалу, а именно $x=\frac{5\pi}{4}$.

Пример 12. Решить уравнение $\sin x-\cos x=1+\sin x\cos x$.

Сделаем замену $t=\sin x-\cos x \Rightarrow t^2=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$. Получим квадратное уравнение $t=1+\frac{1-t^2}{2} \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=3 \end{array}\right.$. Рассмотрим первое уравнение: $\sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

Второе уравнение решений не имеет, так как $\frac{3}{\sqrt{2}}>1$.

Множество решений запишем в более простом виде.

Ответ: $x=2\pi n, x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

Для успешного решения задач необходимо умение "видеть" те или иные формулы в самых разнообразных записях. Такое умение приобретается только посредством упражнений.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить $8\sin 10^\circ\cos 10^\circ(\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ)(\cos^2 20^\circ-\sin^2 20^\circ)-\cos 10^\circ$.

2. Вычислить $\operatorname{tg}15^\circ\cdot\frac{\sin 45^\circ+\cos 15^\circ}{\cos 45^\circ-\sin 15^\circ}$.

3. Упростить $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}$.

4. Упростить $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

5. Упростить $\frac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}\cdot\operatorname{ctg}3x$.

6. Найти $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$.

7. Найти $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

8. Найти $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

9. Найти $\arcsin(\cos 10)$.

10. Найти $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)\right)$.

11. Доказать тождество $\frac{\sin 3x}{1+\cos 2x+\cos 4x}=\frac{\sin x}{\cos 2x}$.

12. Найти решение уравнения $\cos 3x\cos 5x=\cos x\cos 7x$, лежащее в интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

13. Найти сумму корней уравнения $4\cos^2 x+\sin x\cos x+3\sin^2 x=3$, лежащих на отрезке $[\pi;2\pi]$.

14. Решить уравнение $\frac{\cos^2 x-\sin^2 2x}{4\cos^2 x}=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

15. Решить уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{7}{16}$.

16. Решить уравнение $\sin x\cos x-\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}\cos x-\frac{3}{2}$.

17. Решить уравнение $2\sin x+\sqrt{6\cos x}=0$.

18. Решить уравнение $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x=2\operatorname{ctg} 4x$.

19. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos^2 x+2a\cos^2\frac{x}{2}+1=\frac{5a}{4}$ имеет хотя бы один корень?

20. Решить неравенство $\sin 2x+\operatorname{tg} x\geq 2$.

Ответы к задачам § 4

1. 0
2. 1
3. 0
4. 2
5. 1
6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
7. $\frac{\pi}{4}$
8. $\frac{1}{\sqrt{5}}$
9. $10-\frac{7}{2}\pi$
10. $-\frac{\pi}{4}$
11.
12. $\frac{\pi}{4}$
13. $\frac{13\pi}{4}$
14. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$
15. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$
16. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$
17. $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$
18. $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$
19. $a\le -4, a\ge 2$
20. $\frac{\pi}{4}+\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$