§3. Логарифмы

3.1. Общее понятие функции.

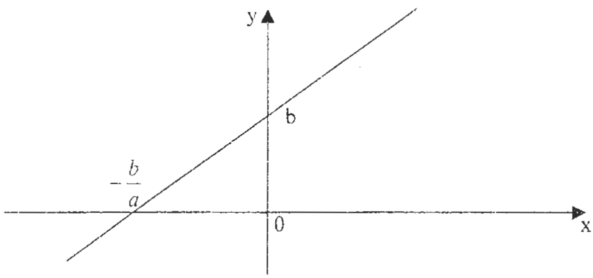
Определение. Величина y называется функцией величины x, если каждому значению x из некоторого множества чисел соответствует одно вполне определенное и единственное значение величины y. Факт функциональной зависимости между x и y в общем виде записывают так: $y = f(x)$; величина x называется аргументом функции.

Аргументы функций, рассматриваемых в школе, всегда предполагаются действительными; сами функции также принимают лишь действительные значения. Чаще всего функциональные зависимости задаются формулами.

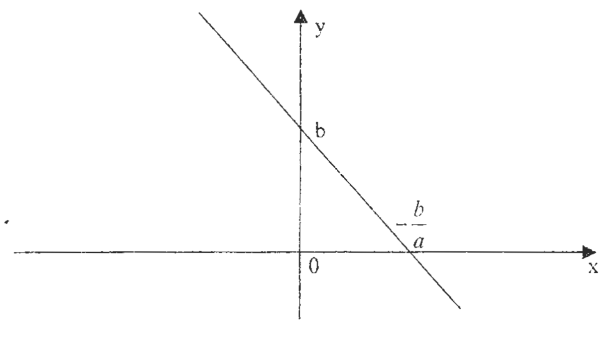
Определение. Совокупность всех тех значений аргумента x, которым по данной формуле соответствуют вполне определенные действительные значения функции, называется областью определения.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy с координатами вида $(x, f(x))$, где x принадлежит области определения функции y.

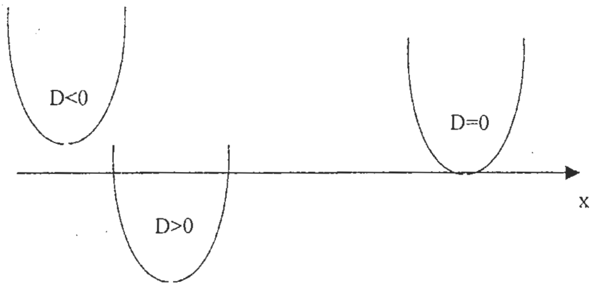
Ниже приведены схематические графики некоторых наиболее важных функций: линейной $y = ax + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, логарифмической и показательной.



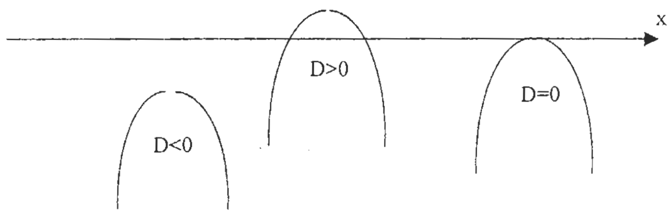
$y = ax + b, a > 0$



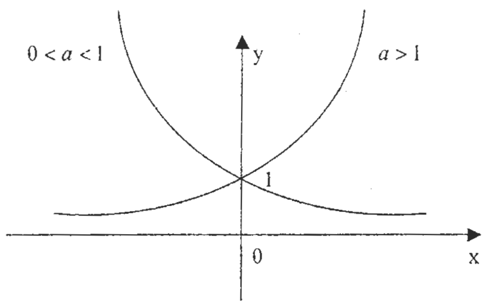
$y = ax + b, a < 0$



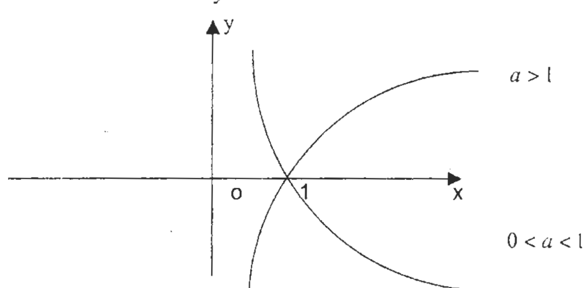
$y = ax^2 + bx + c, a > 0$



$y = ax^2 + bx + c, a < 0$



$y = a^x$



$y = \log_a x$

3.2. Логарифмическая функция.

Пусть $x > 0, a > 0$, $a \neq 1$. В соотношении $a^y = x$ из трех чисел a, x, y можно найти любое по заданным двум другим.

Определение. Логарифмом числа x по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить число x, т.е. $a^{\log_a x} = x$. Данное равенство называется основным логарифмическим тождеством, а функция $y = \log_a x$ называется логарифмической с основанием a.

3.2.1. Основные свойства логарифмической функции.

1) $\log_a a = 1$.

2) $\log_a 1 = 0$.

3) $\log_a(xy) = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0$.

4) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a |x| - \log_a |y|, \frac{x}{y} > 0$.

5) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}, b > 0$ и $b \neq 1$.

Часто применяемое следствие формулы 5: $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}, x > 0$ и $x \neq 1$.

6) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, x > 0$.

При четном α можно распространить данную формулу на отрицательные значения x, что часто является необходимым при решении уравнений. А именно: $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|, x \neq 0$.

7) $\log_{x^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_x b, b > 0, x > 0$ и $x \neq 1$.

Эту формулу при четном α тоже можно распространить на отрицательные значения x. А именно: $\log_{x^{2k}} b = \dfrac{1}{2k} \log_{|x|} b, b > 0, x > 0$ и $x \neq 1$.

8) Если $a > 1$, то логарифмическая функция является возрастающей, т.е. $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y; x, y > 0$.

9) Если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция является убывающей, т.е. $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y; x, y > 0$.

Пример решения задачи.

1. Если $\log_a 27 = b$, то чему равен $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$?

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a} = \frac{2}{6} \log_3 a = \frac{1}{3} \log_3 a = \log_{27} a = \frac{1}{\log_a 27} = \frac{1}{b}.$$

10) Решение простейших логарифмических уравнений и неравенств.

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

$$\log_a x < b \Leftrightarrow \begin{cases} x > a^b, 0 < a < 1; \\ 0 < x < a^b, a > 1 \end{cases} \text{ и } \log_a x > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < a^b, 0 < a < 1; \\ x > a^b, a > 1 \end{cases}$$

Процесс решения простейших логарифмических уравнений и неравенств называют потенциированием.

3.3. Методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Процесс решения уравнения (неравенства) кратко можно описать как сведение исходного уравнения (неравенства) с помощью свойств логарифмической функции и алгебраических преобразований к одному или совокупности нескольких простейших уравнений (систем неравенств).

В подавляющем большинстве задач можно выделить два ключевых момента их решения:

- приведение всех логарифмических функций, входящих в уравнение (неравенство) к одному основанию;
- сведение логарифмического уравнения (неравенства) к алгебраическому уравнению (неравенству) с помощью замены $t = \log_a f(x)$.

При решении многих неравенств хорошо работает метод интервалов. В том смысле, что проверка интервалов не приводит к громоздким вычислениям. При решении неравенств логическим способом необходимо, чтобы все переходы были равносильными.

Решая логарифмическое уравнение, нужно после каждого преобразования определять, как изменилась ОДЗ, так как сужение ОДЗ может привести к потере корней. Посторонние корни выявляются и отбрасываются в процессе проверки.

Лишь в редких случаях проверка не нужна. Лучше ее делать всегда.

Примеры решения задач.

Пример 2. Решить уравнение $x^{\log_5(8x)} = 16\sqrt[3]{x^4}$.

ОДЗ $x > 0$.

Прологарифмируем левую и правую части равенства по основанию 5. Получим $\log_5 x(\log_5 8 + \log_5 x) = \log_5 16 + \frac{4}{3}\log_5 x$. Пусть $t = \log_5 x$. Тогда $t\log_5 8 + t^2 = \frac{4}{3}\log_5 8 + \frac{4}{3}t$ или $(\log_5 8 + t)(t - \frac{4}{3}) = 0$. Следовательно, $t = \log_5 \frac{1}{8}$ и $t = \frac{4}{3}$. Откуда $x = \frac{1}{8}$ и $x = 5^{\frac{4}{3}}$.

Проверка: $x = \frac{1}{8}, \left(\frac{1}{8}\right)^0 = \frac{16}{16}$ - верно; $x = 5^{\frac{4}{3}}, 16 \cdot 5^{\frac{16}{9}} = 16 \cdot 5^{\frac{16}{9}}$ - верно.

Ответ: $x = \frac{1}{8}$ и $x = 5^{\frac{4}{3}}$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-5}(x-3) + \log_{x-5}(x-3a) = 2$ не имеет корней.

Уравнение равносильно смешанной системе $\begin{cases} x > 5, \\ x \neq 6, \\ x - 3a > 0, \\ (x-3)(x-3a) = (x-5)^2 \end{cases}$

Выясним, когда система имеет хотя бы одно решение. Решим сначала уравнение. Раскрывая скобки, приводя подобные и группируя, получим $(7-3a)x = 25-9a$. Если $a=\frac{7}{3}$, то уравнение принимает вид $0=4$ и решений нет. Пусть $a \neq \frac{7}{3}$, тогда $x=\frac{25-9a}{7-3a}$.

Подставим найденное значение x в неравенства системы и найдем все значения параметра, при которых эти неравенства выполняются одновременно.

$$\begin{cases} \dfrac{25-9a}{7-3a} > 5, \\ \dfrac{25-9a}{7-3a} \neq 6, \\ \dfrac{25-9a}{7-3a} - 3a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{3} < a < \dfrac{7}{3}; \\ a \neq \dfrac{17}{9}; \\ a < \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3} < a < \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < a < \frac{17}{9}, \frac{17}{9} < a < \frac{7}{3}$$

При найденных значениях параметра уравнение имеет решение. Теперь мы можем ответить на вопрос задачи: $a \leq \frac{5}{3}, a = \frac{17}{9}, a \geq \frac{7}{3}$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_{x^2+2x+1}\frac{x+2}{x+1}+\frac{1}{2}<0$.

Решим неравенство методом интервалов.

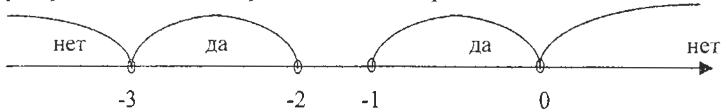
$$\text{ОДЗ} \begin{cases} x^2+2x+1>0, \\ x^2+2x+1 \neq 1, \\ \dfrac{x+2}{x+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x<-2, -1<x<0, x>0$$

Решим уравнение $\log_{x^2+2x+1}\frac{x+2}{x+1}+\frac{1}{2}=0$. Выполним ряд преобразований и найдем корни.

$$\log_{x^2+2x+1}\frac{x+2}{x+1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{|x+1|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1, \\ \dfrac{x+3}{x+1}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-1, \\ \dfrac{x+1}{x+1}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3$$

Сделаем проверку: $x=-3, \log_4\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ - верно. Значит, корень истинный.

Проверим выполнение неравенства на интервалах.



а) $x < -3, x = -4; \log_9 \frac{2}{3} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 9 < \sqrt{\frac{3}{2}}$ - неверно;

б) $-3 < x < -2, x = -\frac{5}{2}; \log_{\frac{9}{4}} \frac{1}{3} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ - верно;

в) $-1 < x < 0, x = -\frac{1}{2}; \log_{\frac{1}{4}} 3 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 > 2$ - верно;

г) $x > 0, x = 1; \log_4 \frac{3}{2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$ - неверно.

Ответ: $-3 < x < -2, -1 < x < 0$.

Решим теперь то же самое неравенство, используя общие свойства неравенств.

ОДЗ $x < -2, -1 < x < 0, x > 0$

Неравенство равносильно совокупности двух систем, решая которые, получим:

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} x < -2, -1 < x < 0, x > 0; \\ 0 < (x+1)^2 < 1; \\ \dfrac{x+2}{x+1} > \dfrac{1}{|x+1|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, -1 < x < 0, x > 0; \\ -2 < x < -1, -1 < x < 0; \\ \dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{1}{|x+1|} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0, \\ \dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{1}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0 \\
\begin{cases} x < -2, -1 < x < 0, x > 0; \\ (x+1)^2 > 1; \\ \dfrac{x+2}{x+1} < \dfrac{1}{|x+1|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, x > 0; \\ \dfrac{x+2}{x+1} - \dfrac{1}{|x+1|} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ \dfrac{x+3}{x+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ -3 < x < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{x+1}{x+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -3 < x < -2
\end{array}\right.$$

Ответ: $-3 < x < -2, -1 < x < 0$.

3.4. Показательная функция.

Определение. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функция вида $y = a^x$ называется показательной.

Основные свойства показательной функции.

1) Областью определения является все множество действительных чисел.

2) Областью значений является множество положительных действительных чисел.

3) При $a > 1$ функция строго возрастает на всей области определения, то есть $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$;

- при $a < 1$ функция строго убывает на всей области определения, то есть $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

4) $a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

5) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

6) $\left(a^{x}\right)^{y} = a^{xy}$.

7) $a^{x} \cdot b^{x} = (ab)^{x}$.

8) $\dfrac{a^{x}}{b^{x}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{x}$.

9) $a^{x} = b^{x\log_b a}$.

10) Решение простейших показательных уравнений и неравенств.

1. $a^{x} = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ для $b > 0$; в случае $b \le 0$ решений нет.

2. $a^{x} < b \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_a b, 0 < a < 1, b > o \\ x < \log_a b, a > 1, b > 0 \end{cases}$ и $a^{x} > b \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_a b, 0 < a < 1, b > 0; \\ x > \log_a b, a > 1, b > 0 \end{cases}$.

3.5. Методы решения показательных уравнений и неравенств.

Процесс решения уравнения (неравенства) кратко можно описать как сведение исходного уравнения (неравенства) с помощью свойств показательной функции и алгебраических преобразований к одному или совокупности нескольких простейших уравнений (систем неравенств).

В подавляющем большинстве задач можно выделить два ключевых момента их решения:

- приведение всех показательных функций, входящих в уравнение (неравенство), к одному основанию;

- сведение показательного уравнения (неравенства) к алгебраическому уравнению (неравенству) с помощью замены $t = a^{f(x)}$.

При решении многих неравенств хорошо работает метод интервалов; в том смысле, что проверка интервалов не приводит к громоздким вычислениям. При решении неравенств логическим способом необходимо чтобы все переходы были равносильными.

Решая показательное уравнение, нужно после каждого преобразования определять, как изменилась ОДЗ, так как сужение ОДЗ может привести к потере корней. Посторонние корни выявляются и отбрасываются в процессе проверки.

Примеры решения задач.

Пример 5. Решить уравнение $9^{x} + 6^{x} = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^{x} + 6^{x} = 2 \cdot 4^{x}$.

Разделив уравнение на $6^{x} \neq 0$, получаем $\dfrac{9^{x}}{6^{x}+1} = 2 \cdot \dfrac{4^{x}}{6^{x}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{6}\right)^{x} + 1 = 2\left(\dfrac{4}{6}\right)^{x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} + 1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x}$. Сделав замену $t = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} > 0$, получаем уравнение $t + 1 = 2 \cdot \dfrac{1}{t}$. Умножив обе части уравнения на t, приходим к квадратному уравнению $t^{2} + t - 2 = 0$, корни которого $t_1 = 1, t_2 = -2$. Учитывая условие $t > 0$. отбрасываем корень t_2. Это же условие позволяет не проверять корень t_1 ввиду равносильности преобразований при данном условии. Теперь возвращаясь к x, получаем $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Пример 6. Решить уравнение $4^x - (2+a)\cdot 2^x + 2a = 0$ (1).

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} t > o \\ 2^x = t \\ t^2 - (2+a)t + 2a = 0 \end{cases}$ в том смысле, что всякое решение уравнения дает решение системы. и наоборот, всякое решение системы дает решение уравнения. Решение смешанной системы начинаем с решения квадратного уравнения. Дискриминант данного уравнения $D = (2+a)^2 - 8a = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$. Так как $D \geq 0$, квадратное уравнение всегда имеет решение. При $a = 2$ $D = 0$ и уравнение имеет один корень, $t = 2$, который будет и решением системы вместе с $x = 1$.

Пусть теперь $a \neq 2$. Тогда $t_{1,2} = \frac{2+a \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{2+a \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2} = \frac{2+a \pm |a-2|}{2}$, $t_1 = \frac{2+a+2-a}{2} = 2$, $t_2 = \frac{2+a-2+a}{2} = a$.

Корень $t_1 = 2$ всегда будет определять решение системы вместе с $x = 1$. Корень $t_2 = a$ будет определять решение системы при $a > 0$, так как в системе есть неравенство $t > 0$, при этом $x = \log_2 a$. Объединяя полученные результаты, получаем:

при $a > 0, a \neq 2$ уравнение (1) имеет два корня $x_1 = 1, x_2 = \log_2 a$;

при $a \leq 0$ или $a = 2$ уравнение (1) имеет один корень $x = 1$.

Пример 7. Решить неравенство $2\cdot 3^x + 9\cdot 4^x \geq 12^x + 18$.

Решим неравенство двумя способами.

а) Метод интервалов.

ОДЗ: $x \in R$.

Уравнение $2\cdot 3^x + 9\cdot 4^x = 12^x + 18$.

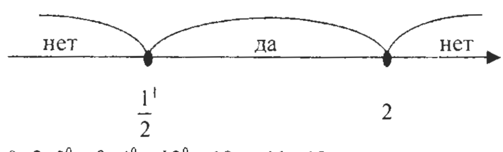
Сгруппируем члены уравнения:

$$2\cdot 3^x + 9\cdot 4^x = 12^x + 18 \Leftrightarrow (2\cdot 3^x - 12^x) + (9\cdot 4^x - 18) = 0 \Leftrightarrow 3^x(2-4^x) + 9(4^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-4^x)(3^x - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - 4^x = 0 \\ 3^x - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Проверим корни: $x = \frac{1}{2}: 2\sqrt{3} + 18 = 2\sqrt{3} + 18$; $x = 2: 18 + 9\cdot 16 = 144 + 18$.

Проверим неравенство на интервалах:



$x = 0: 2\cdot 3^0 + 9\cdot 4^0 \geq 12^0 + 18 \Leftrightarrow 11 \geq 19$;

$x = 1: 2\cdot 3^1 + 9\cdot 4^1 \geq 12^1 + 18 \Leftrightarrow 42 \geq 30$;

$x = 3: 2\cdot 3^3 + 9\cdot 4^3 \geq 12^3 + 18 \Leftrightarrow 630 \geq 1876$.

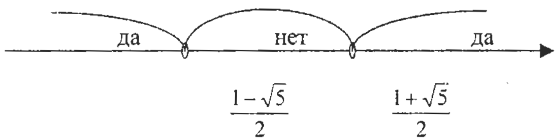
б) Логический метод.

$$2\cdot 3^x+9\cdot 4^x\ge 12^x+18\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-4^x\ge 0\\3^x-9\ge 0\end{cases}\\\begin{cases}2-4^x\le 0\\3^x-9\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\ge 4^x\\3^x\ge 9\end{cases}\\\begin{cases}2\le 4^x\\3^x\le 9\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\ge 2^{2x}\\3^x\ge 3^2\end{cases}\\\begin{cases}2\le 2^{2x}\\3^x\le 3^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1\ge 2x\\x\ge 2\end{cases}\\\begin{cases}2\le 2x\\x\le 2\end{cases}\end{array}\right..$$

Первая система имеет пустое множество решений, а решением второй системы будет интервал [1/2,2].

Пример 8. Решить неравенство $\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}<1$.

ОДЗ: $\left(x^2-x-1\right)>0$. Найдем ОДЗ методом интервалов. Корни квадратного трехчлена $x_{1,2}=\frac{1\pm\ 5}{2}$.

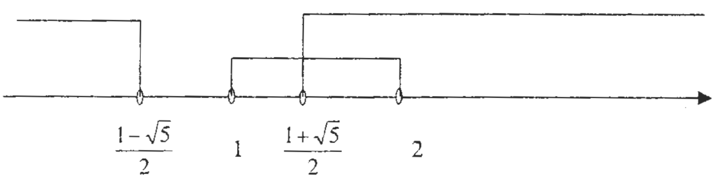


Получаем ответ : $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решим исходное неравенство логическим методом.

$$\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}<1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-1>1\\x^2-1<0\end{cases}\\\begin{cases}x^2-x-1<1\\x^2-1>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-x-2>0\\x^2-1<0\end{cases}\\\begin{cases}x^2-x-2<0\\x^2-1>0\end{cases}\end{array}\right..$$

Первая система имеет пустое множество решений, а решением второй системы будет интервал (1,2). Для получения ответа найдем пересечение данного интервала с ОДЗ.



Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<x<2$.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить $\left(729^{\frac{1}{3}+\log_{81}4}\right)\cdot\left(\dfrac{\log_2 24}{\log_{96}2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12}2}\right)$.

2. Найти $\log_{a^2\sqrt{b}}(a^2b^4)$ при условии, что $\log_a b=4$.

3. Решить уравнение $\log_2(x(x-1))-\log_4(x-1)^2-\dfrac{9}{4}\log_8^2 x^2=0$.

4. Решить уравнение $27\cdot x^{\log_{27}x}=x^{\frac{10}{3}}$.

5. Решить уравнение $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$.

6. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\log_{x-2}(x-a)+\log_{x-2}(x-1)=2$ имеет хотя бы один корень.

7. Решить неравенство $\log_x(6x-1)>\log_x(2x)$.

8. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_x 3-\dfrac{5}{2}$.

9. Решить неравенство $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_4 x}\le\dfrac{1}{2}$.

10. Решить неравенство $\log_{(x-2)^2}(x^2-7x+10)<\dfrac{1}{2}$.

11. Решить уравнение $16^x+(a-4)4^x-4a=0$

12. Решить систему $\begin{cases}3\cdot 2^x-2^{x+y}+2=0\\ 5\cdot 2^{x+1}-2^{x+y+1}-16=0\end{cases}$

13. Решить уравнение $\left(7-4\sqrt{3}\right)^x+2\left(2-\sqrt{3}\right)^x=8$

14. Решить уравнение $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=62$

15. Решить уравнение $x^{\lg x}=1000x^2$

16. Решить уравнение $(x-2)^{x^2+2x}=(x-2)^{11x-20}$

17. Решить уравнение $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$

18. Решить неравенство $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x \le 7$

19. Решить неравенство $9^x - 10^{3x-1} \le -1$

20. Решить неравенство $2\log_4(2^x - 1) + x < \log_2 3 - \log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$

Ответы к задачам § 3

1. 216.

2. $\frac{9}{2}$.

3. $x=-1; x=2; x=-2$.

4. $x=3; x=3^9$.

5. $x=4; x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

6. $2<a<\frac{5}{2}; \frac{5}{2}<a<3$.

7. $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}; x>1$.

8. $0<x<1; \sqrt{3}<x<9$.

9. $0<x<\frac{1}{4}; x\ge\sqrt[3]{4}$.

10. $1<x<2; 5<x<6$.

11. $a\ge 0, a=-4 \Rightarrow x=1; a<0, a\ne -4 \Rightarrow x_1=1, x_2=\log_4(-a)$.

12. $x=1, y=2$.

13. $x=\log_{2-\sqrt{3}} 2$.

14. $x=2; x=-2$.

15. $x=\frac{1}{10}; x=1000$.

16. $x=1; x=2; x=3; x=4; x=5$.

17. $x=1; x=-1$.

18. $x\le 0$.

19. $-1\le x\le 1$.

20. $0<x<2$.