§2. Алгебраические уравнения и неравенства

2.1. Уравнения.

На вступительных экзаменах типичные ошибки абитуриентов при решении уравнений связаны с потерей и приобретением корней. Мы рассмотрим два вопроса: 1) Отчего теряются корни уравнения и появляются посторонние корни? 2) Когда и для чего нужна проверка?

Ответим на первый вопрос. В процессе решения мы находим корни вовсе не исходного уравнения, а некоторого другого или нескольких других уравнений. Лишь для простейших уравнений мы можем определить корни непосредственно, а в большинстве случаев мы применяем предварительные преобразования: упрощаем выражения, переносим из одной части уравнения в другую, возводим обе части в степень, логарифмируем, потенциируем и т.п. Но раз уравнение другое, то и корни у него могут быть другие.

Дадим необходимые определения.

1) Областью допустимых значений (для краткости ОДЗ) уравнения (неравенства, выражения) называется общая часть областей определения функций, входящих в состав уравнения (неравенства, выражения), т.е. множество всех значений неизвестного, при которых все функции, входящие в уравнение (неравенство, выражение), имеют смысл.

2) Решением уравнения (неравенства) называется всякое значение неизвестного, при подстановке которого в обе части уравнения (неравенства) получается справедливое числовое равенство (неравенство). Отметим, что все решения уравнения (неравенства) по определению должны входить в ОДЗ. Решить уравнение (неравенство) – значит найти все его решения. Решения уравнения часто называют корнями.

3) Если все решения одного уравнения (неравенства) являются решениями другого, то второе уравнение (неравенство) называется следствием первого.

4) Два уравнения (неравенства) называются равносильными, или эквивалентными, если каждое из них является следствием другого. Два выражения называются равносильными, если их ОДЗ совпадают и они принимают одинаковые числовые значения для всех значений переменной из ОДЗ.

При замене некоторого уравнения новым происходит следующее:

1) если новое уравнение не является следствием данного, то корни теряются;

2) если новое уравнение является следствием данного, но не равносильно ему, то появляются посторонние корни;

3) если новое уравнение равносильно данному, то их корни совпадают.

Нельзя заменять данное уравнение новым, не являющимся его следствием, так как это приводит к потере корней и оценивается на экзамене как грубая ошибка.

Если при решении мы каждый раз применяли преобразования, приводящие к равносильным уравнениям, то проверка не нужна; если же хотя бы один раз новое уравнение, являясь следствием предыдущего, не было ему равносильно, то проверка необходима, так как с ее помощью мы обнаружим появившиеся посторонние корни.

Если решение проводилось без анализа равносильности уравнений, проверка является неотъемлемой частью решения.

При решении уравнений в основном совершаются преобразования трех видов:

1) взятие некоторой функции от обеих частей уравнения (например. возведение в степень, логарифмирование, потенцирование и т.п.);

2) тождественные преобразования внутри каждой части уравнения;

3) умножение (деление) обеих частей уравнения на некоторую функцию или прибавление к обеим частям некоторой функции (в частности перенос из одной части уравнения в другую).

В результате этих преобразований меняется уравнение, изменяется ОДЗ. Следовательно. необходимо не допускать потери корней и предвидеть появление посторонних.

2.1.1. Иррациональные уравнения.

При решении иррациональных уравнений часто применяются следующие преобразования первого и второго видов: возведение в квадрат, т.е. переход от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению $f^2(x) = g^2(x)$, и два типа тождественных преобразования: 1) $(\sqrt{f(x)})^2 = f(x)$ 2) $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)g(x)}$.

Рассмотрим преобразование первого вида. Ясно, что второе уравнение является следствием первого. Обратное неверно, так как в число корней второго уравнения входят и все корни "постороннего" уравнения $f(x) = -g(x)$.

При применении тождественных преобразований расширяется ОДЗ, и за счет этого может произойти приобретение посторонних корней.

Пример решения задачи.

1. Решить уравнение с параметром $ax = 2\sqrt{x} - a$.

При решении уравнений и неравенств с параметром необходимо следить за равносильностью переходов. В частности, данное уравнение равносильно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} a^2(x^2+2x+1) = 4x, \\ a(x+1) \ge 0, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2x^2 + (2a^2-4)x + a^2 = 0, \\ a \ge 0, \\ x \ge 0 \end{cases}$$

При $a = 0$ уравнение в системе не является квадратным, поэтому рассмотрим этот случай отдельно. Пусть $a = 0$. Тогда система имеет единственное решение $x = 0$.

Пусть $a > 0$. Вычислим дискриминант квадратного трехчлена $D = (2a^2-4)^2 - 4a^4 = 16(1-a^2)$. Таким образом, $D \ge 0$ при $0 < a \le 1$. В противном случае уравнение, а следовательно, и система решений не имеет.

Решая уравнение, получим $x = \dfrac{2 - a^2 \pm 2\sqrt{1-a^2}}{a^2}$. Осталось выяснить, при каких значениях параметра найденные корни неотрицательны. Для этого достаточно заметить, что $x = \dfrac{(\sqrt{1-a^2} \pm 1)^2}{a^2} \ge 0$ при всех $0 < a \le 1$.

Запишем ответ: при $a<0$ решений нет; при $a=0$ одно решение $x=0$; при $0<a<1$ два решения $x=\dfrac{2-a^2\pm2\sqrt{1-a^2}}{a^2}$; при $a=1$ одно решение $x=1$; при $a>1$ решений нет.

2.1.2. Рациональные уравнения.

При решении рациональных уравнений наиболее часто применяются преобразования третьего вида. Самой распространенной ошибкой является деление обеих частей уравнения на функцию, которая обращается в ноль в точках из ОДЗ, что естественно приводит к потере корней. Отметим также, что даже приведение подобных членов может привести к появлению посторонних корней.

При решении уравнений с модулем наиболее универсальным приемом является раскрытие модулей на интервалах. В этом случае осуществляется равносильный переход от уравнения к совокупности смешанных систем.

Пример решения задачи.

2. Решить уравнение с параметром $|x+a|-|2x-a+2|=a$.

Считается, что уравнение или неравенство с параметром решено, если для каждого значения $a\in R$ указано множество решений.

Данное уравнение равносильно совокупности четырех смешанных систем:

$$1)\begin{cases}x+a\ge 0,\\ 2x-a+2\ge 0,\\ x+a-2x+a-2=a\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}x+a\ge 0,\\ 2x-a+2<0,\\ x+a+2x-a+2=a\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}x+a<0,\\ 2x-a+2\ge 0,\\ -x-a-2x+a-2=a\end{cases}\qquad 4)\begin{cases}x+a<0,\\ 2x-a+2<0,\\ -x-a+2x-a+2=a\end{cases}.$$

Из первой системы, решая уравнение, находим $x=a-2$. Подставляя x в ограничения, получим систему неравенств $\begin{cases}2a-2\ge 0,\\ a-2\ge 0\end{cases}$, решением которой является множество $a\ge 2$.

Из второй системы, решая уравнение, находим $x=\dfrac{a-2}{3}$. Подставляя x в ограничения, получим систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{4a-2}{3}\ge 0,\\ \dfrac{2a-4}{3}-a+2<0\end{cases}$, решением которой является множество $a>2$.

Из третьей системы $x = \frac{-a-2}{3}$ с ограничениями на параметр $\begin{cases} \frac{2a-2}{3} < 0, \\ \frac{-2a-4}{3} - a + 2 \ge 0 \end{cases}$ или $a \le \frac{2}{5}$.

Из четвертой системы $x = 3a - 2$ с ограничениями на параметр $\begin{cases} 4a - 2 < 0, \\ 6a - 4 - a + 2 < 0 \end{cases}$ или $a < \frac{2}{5}$.

Объединяя решения систем, получим ответ: при $a < \frac{2}{5}$ два решения $x = -\frac{a+2}{3}, x = 3a - 2$; при $a = \frac{2}{5}$ одно решение $x = -\frac{4}{5}$; при $\frac{2}{5} < a < 2$ решений нет; при $a = 2$ одно решение $x = 0$; при $a > 2$ два решения $x = a - 2, x = \frac{a-2}{3}$.

2.2. Системы уравнений.

Решением системы уравнений называется набор значений неизвестных, при котором каждое входящее в систему уравнение обращается в верное числовое равенство.

Основным методом решения уравнений является метод последовательного исключения неизвестных. Суть его в следующем. Выбирается одно из уравнений системы и из него выражается одно неизвестное через другие. Подставляя полученное выражение в оставшиеся уравнения, получаем новую систему с меньшим количеством уравнений и неизвестных. Затем вся последовательность действий повторяется. Многие системы таким приемом удается свести к одному уравнению с одним неизвестным. Решая его, находим одно из неизвестных, с помощью которого последовательно находятся остальные.

На экзаменах часто предлагаются системы нелинейных уравнений и у поступающих возникают проблемы с применением этого метода (так как выразить одно из неизвестных через другие сложно). В таких случаях бывает удобно применить равносильное преобразование системы, а именно, можно к одному из уравнений прибавить другое, умноженное на число. Иногда таким образом удается избавиться от нелинейности в одном из уравнений. Также очень эффективным бывает метод замены переменных (например, $s = f(x,y); t = g(x,y)$ для системы двух уравнений с двумя неизвестными x, y). Удачная замена приводит к резкому упрощению системы уравнений.

Примеры решения задач.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} (5+m)x + y = 8 + m, \\ (m-1)x + (m+1)y = m - 4 \end{cases}$.

Используя метод исключения неизвестных, выразим из первого уравнения y и подставим во второе: $\begin{cases} y = 8 + m - (5 + m)x, \\ (m-1)x + (m+1)((8+m) - (5+m)x) = m - 4 \end{cases}$.

Решив второе уравнение, получаем $x(m+3)(m+2) = (m+6)(m+2)$. Из последнего равенства получаем следующее:

1) $m = -2 \Rightarrow 0 = 0$, и поэтому решением последнего уравнения будет $x \in R$. Таким образом, решением системы будет любая пара чисел вида $(c, 6 - 3c)$;

2) $m = -3 \Rightarrow 0 = -3$, и поэтому уравнение, а значит и система, решений не имеют;

3) $m \neq -2, m \neq -3 \Rightarrow x = \dfrac{m+6}{m+3}, y = \dfrac{-6}{m+3}$.

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$.

Введем новые переменные: $t = x + y, s = x$. Тогда наша система примет вид $\begin{cases} s + t = 11, \\ st = 30 \end{cases}$. Выразив из второго уравнения s и подставив в первое, легко находим решения: (5;6) и (6;5). Наконец, возвращаясь к исходным переменным, находим все пары $(x; y)$, являющиеся решениями исходной системы: (3;2), (2;3), (5;1), (1;5). Истинность полученных ответов легко проверить подстановкой в систему.

2.3. Неравенства.

Четко выделяются два способа решения неравенств: метод интервалов и логический метод. Оба они имеют свои достоинства и недостатки, о которых будет сказано ниже.

2.3.1. Метод интервалов.

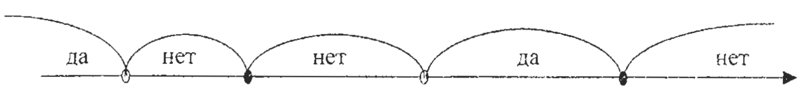
Данный метод решения неравенств основан на следующей теореме: если непрерывная на интервале функция не имеет на нем корней, то на данном интервале функция знакопостоянна. Алгоритм решения следующий:

1) записать и найти ОДЗ, нанести ОДЗ на числовую прямую;

2) заменить неравенство уравнением;

3) решить уравнение, то есть найти его корни;

4) нанести корни на ОДЗ (в случае нестрогого неравенства корни изображаются "закрашенными" точками, а в случае строгого "пустыми") и проверить выполнение неравенства на каждом из полученных интервалов следующим образом: из интервала выбирается произвольное вещественное число и подставляется в неравенство. В результате получается числовое неравенство, которое либо верно (да), либо неверно (нет). Все это может быть явным образом отражено с использованием числовой прямой.



Наиболее часто встречаемые ошибки:

1. Неверно записано или найдено ОДЗ.
2. Неверно решено уравнение.
3. После решения уравнения не отброшены посторонние корни.
4. Неверно нанесены корни на ОДЗ.
5. Вместо проверки выполнения неравенства в каждом интервале проверяется только один, а для остальных берется чередование знаков «да» - «нет».
6. Выбранная для проверки точка не принадлежит выбранному интервалу.

Главный плюс метода интервалов заключается в том, что вместо неравенства работа ведется с более простыми объектами – уравнениями и числовыми неравенствами. Главный минус - возможная трудоемкость, связанная с тяжелыми вычислениями, особенно если неравенство содержало трансцендентные функции (логарифмы, показательные и т.д.) или получившиеся интервалы очень малы.

Пример решения задачи.

5. Решить неравенство $2-\dfrac{x-3}{x-2}>\dfrac{x-2}{x-1}$.

Решим неравенство методом интервалов.

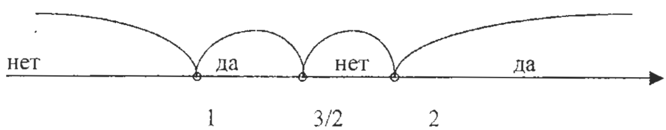
а) ОДЗ: $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} => \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 1 \end{cases}.$

б) Запишем и решим уравнение $2-\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{x-2}{x-1}$:

$2(x-1)(x-2)-(x-3)(x-1)=(x-2)^2 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}.$

в) Проверим корень: $2-\dfrac{\frac{3}{2}-3}{\frac{3}{2}-2}=\dfrac{\frac{3}{2}-2}{\frac{3}{2}-1}; 2-3=-1$ - истинное равенство.

г) Нанесем корень на ОДЗ и проверим неравенство в каждом полученном интервале:



$x<1, x=0; 1<x<\dfrac{3}{2}, x=\dfrac{5}{4}; \dfrac{3}{2}<x<2, x=\dfrac{7}{4}; 2<x, x=3.$

Ответ: $1<x<\dfrac{3}{2}; 2<x.$

2.3.2. Логический метод.

Данный метод основан на свойствах отношения порядка и функций, входящих в данное неравенство (возрастание, убывание, знакопостоянство и т.д.).

Связь данного метода с функциональными свойствами будет рассмотрена в следующих разделах, здесь же мы приведем лишь два основных свойства отношения порядка:

1. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
2. $a > b, c > 0 \Leftrightarrow ac > bc$

В приведенных равенствах знак строгого порядка можно сменить на знак нестрогого порядка. В самом общем случае решение логическим методом сводит неравенство к совокупности систем неравенств более простого вида. Основной минус логического метода - сложная структура решения, особенно в случае большого числа систем. На практике часто комбинирование этих двух способов дает наиболее удобный способ решения. Например, трансцендентное неравенство заменой сводится к алгебраическому, которое решается методом интервалов, а неравенства, получающиеся в результате обратной замены, решаются логическим способом.

Примеры решения задач.

6. Решить неравенство $\left||3-2x|-1\right| < 2|x|$.

Решение уравнений и неравенств с модулем базируется на последовательном раскрытии модулей, содержащихся в них, и аккуратном учете возникающих ограничений.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 3-2x \geq 0, \\ |2-2x| < 2|x| \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3-2x < 0, \\ |2x-4| < 2|x| \end{cases}.$$

Решим первую систему. Заметим, что при $x \leq \frac{2}{3}$ модули раскрываются следующим образом: $|2-2x| = 2-2x$ и $|x| = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ -x, x < 0 \end{cases}$. При $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$ получаем неравенство $2-2x < 2x$ или $x > \frac{1}{2}$. Учитывая ограничение, получаем $\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}$.

При $x < 0$ неравенство принимает вид $2-2x < -2x$ или $2 < 0$, которое не выполняется ни при каких значениях x.

Решим вторую систему. Заметим, что при $x > \frac{2}{3}$ модули раскрываются следующим образом: $|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, x \geq 2, \\ -2x+4, \frac{2}{3} < x < 2 \end{cases}$ и $|x| = x$. При $x \geq 2$ получаем неравенство $2x-4 < 2x$ или $-4 < 0$, которое верно при всех x. Учитывая ограничение, получим $1 < x < 2$.

Объединяя решения двух систем, мы можем записать ответ: $\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}, x > 1$.

7. Решить неравенство $\sqrt{1-5x}+2 \le \sqrt{(x+3)^2-12x}$.

Решение любого неравенства нужно начинать с нахождения области допустимых значений.

ОДЗ $\begin{cases} 1-5x \ge 0, \\ (x+3)^2-12x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{5}, \\ (x-3)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{5}.$

Заметим, что $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$. Учитывая ОДЗ, модуль раскрываем со знаком минус $|x-3|=3-x$. Получим неравенство $\sqrt{1-5x} \le 1-x$.

Так как для всех значений x из ОДЗ левая и правая части неравенства неотрицательны, то мы можем возвести обе части неравенства в квадрат. Получим квадратное неравенство $1-5x \le 1-2x+x^2$ или $x^2+3x \ge 0$, множество решений которого есть $x \le -3, x \ge 0$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ: $x \le -3, 0 \le x \le \dfrac{1}{5}$.

2.4. Системы неравенств.

Так как решением неравенства является некоторое подмножество действительных чисел, то решением системы неравенств будет пересечение этих подмножеств. Таким образом, решение системы неравенств сводится к решению каждого неравенства этой системы с последующим нахождением общей части этих решений. Пересечение множеств удобно находить с использованием числовой прямой: на числовую прямую наносятся множества (различные множества можно выделять либо разными цветами, либо линиями разного уровня), а затем находится общая часть всех множеств.

Наиболее часто встречающиеся ошибки:

1. Неверно решены неравенства;
2. Неверно нанесены решения неравенств на числовую прямую;
3. Отсутствует четкое понимание понятия пересечения множеств;
4. Интервалы, составляющие одно множество, понимаются как разные множества.

Пример решения задачи.

8. Решить систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{3} \le \dfrac{4}{x}, \\ \dfrac{1}{x} > -1, \\ x^2+3x+1>0 \end{cases}$

а) Решим первое неравенство методом интервалов.

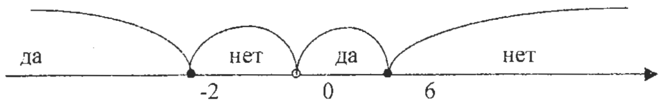
1) ОДЗ: $x \ne 0$.

2) Запишем и решим уравнение:

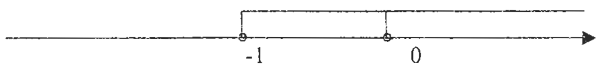
$$\frac{x}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{x} \Rightarrow x^2-4x=12 \Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow x_1=-2, x_2=6\,.$$

3) Проверим корни: $x=-2: -\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{4}{2}; -2=-2. x=6: 2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}; 2=2.$

4) Проверим интервалы:



б) Очевидно, что второе неравенство верно для всех положительных x. Рассмотрим случай $x<0: \begin{cases} x<0, \\ \frac{1}{x}>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<0$. Объединяем полученные интервалы



и получаем ответ: $x>-1, x \neq 0$.

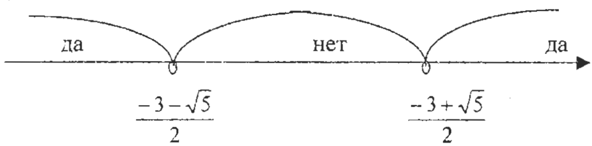
в) Третье неравенство решим методом интервалов.

1) ОДЗ: $x \in R$.

2) $x^2+3x+1=0; x_{1,2}=\frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2}=\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

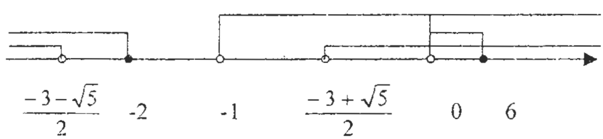
3) Подробную проверку корней мы опускаем.

4)



Таким образом, наша система принимает вид $\begin{cases} x \leq -2, 0<x \leq 6 \\ x>-1, x \neq 0 \\ x<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, x>\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Берем пересечение этих трех множеств



Получаем ответ: $0<x \leq 6$.

2.5. Смешанные системы.

Системы, в которых есть уравнения и неравенства, решаются следующим образом: сначала находятся корни уравнений, затем эти корни подставляются в неравенства, после чего проверяется истинность полученных неравенств. Наиболее часто такие системы встречаются при решении уравнений с модулем, а также уравнений с параметром. В последнем случае после подстановки в неравенства корней уравнения получаются неравенства с неизвестной, роль которой исполняет параметр. Решая эти неравенства, мы находим все ограничения, налагающиеся на параметр.

Задания для самостоятельной работы

1. Решить уравнение $|3-|x-2||=|x-7|$.
2. Решить уравнение $|3-x|+|2x+4|-|x+1|=2x+4$.
3. Решить неравенство $\dfrac{4}{|x+1|-2}\geq|x-1|$.
4. Решить неравенство $\left|\dfrac{(x-1)^2}{(x-2)^2}\right|+\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-12<0$
5. Решить уравнение с параметром $|x-a|+|x+a+1|=3$.
6. Решить уравнение $1+\sqrt{2x}-\sqrt{x+7}=0$.
7. Решить уравнение $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$.
8. Решить неравенство $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}<\dfrac{3}{x}$.
9. Решить неравенство $\sqrt{1-4x}+2\leq\sqrt{(2x+1)^2-8x}$.
10. Решить уравнение с параметром $2\sqrt{x+a}=x+1$.
11. Решить неравенство $\dfrac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)}\geq 0$.
12. Решить неравенство $\dfrac{8+4x}{4x+x^2}\leq\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{4+x}$.
13. Решить неравенство $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\leq\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{(x+1)^2}$.
14. Решить неравенство $ax>\dfrac{1}{x}$.
15. Решить систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}\\ x+y=5\end{cases}$
16. Решить систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=20\\ xy=8\end{cases}$

17. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$

18. Решить систему уравнений $\begin{cases} (a-1)x+y=a+2 \\ (a-1)x+(a-2)y=2a^2-2a-7 \end{cases}$

19. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2-x-6\ge 0 \\ x^2-4<0 \end{cases}$

20. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2-4<0 \\ x+1>0 \\ \frac{1}{2}-x>0 \end{cases}$

Ответы к задачам § 2

1. $x=6$.
2. $x=1$.
3. $-1-2\sqrt{2}\le x<-3;1<x\le 3$.
4. $x<\frac{7}{4};x>\frac{5}{2}$.
5. Если $a<-2;a>1$, то решений нет; если $a=-2;a=1$, то $-2\le x\le 1$; если $-2<a<1$, то $x=1;x=-2$.
6. $x=2$.
7. $x=7$.
8. $x<-1,0<x<\frac{9}{16}$.
9. $x\le -2$.
10. Если $a<0$, то решений нет; если $a=0$, то $x=1$; если $0<a\le 1$, то $x=1\pm 2\sqrt{a}$; если $a>1$, то $x=1+2\sqrt{a}$.
11. $-\sqrt{2}\le x<-1\bigcup -1<x\le\sqrt{2}\bigcup 3\le x<4$.
12. $x>-4,x\ne 0$.
13. $x<1,x\ne -1,x\ne 0$.
14. $a>0\Rightarrow x>\frac{1}{\sqrt{a}}\bigcup -\frac{1}{\sqrt{a}}<x<0;a\le 0\Rightarrow x<0$.
15. $x=2,y=3;x=3,y=2$.
16. $x=2,y=4;x=4,y=2;x=-2,y=-4;x=-4,y=-2$.
17. $x=-1,y=2;x=2,y=1$.
18. $a=3\Rightarrow x=c,y=a+2-(a-1)c;a=1\Rightarrow$ решений нет;
$a\ne 1,a\ne 3\Rightarrow x=\frac{1+a}{1-a},y=2a+3$.
19. Решений нет.
20. $-1<x<\frac{1}{2}$.