§1. Преобразования алгебраических выражений

1.1. Свойства натуральных чисел.

Деление с остатком. Если число n представимо в виде $n = pq + r$, где $p,q \le n$, а $r<p$, то r называется остатком от деления n на p. Если $r=0$, числа p и q называются делителями числа n.

Известно несколько признаков делимости:

на 2: последняя цифра делится на 2;

на 3: сумма цифр делится на 3:

на 4: число из последних двух цифр делится на 4;

на 5: число оканчивается на 0 или 5;

на 9: сумма цифр делится на 9;

на 10: число оканчивается на 0.

Всякое натуральное число N единственным образом с точностью до порядка слагаемых представимо в следующем виде:

$$\overline{n_1 n_2 \ldots n_k} = 10^{k-1} \cdot n_1 + 10^{k-2} \cdot n_2 + \ldots + 10 \cdot n_{k-1} + n_k,$$

где $\overline{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ – числа единиц разрядов N. Данное представление называется аддитивной формой. Кроме аддитивной, существует мультипликативная форма записи натуральных чисел:

$$N = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – различные простые делители числа N, взятые в максимальной степени (простое число имеет ровно два различных). Данное представление также единственно с точностью до порядка сомножителей.

Число n называется наибольшим общим делителем чисел p и q (НОД(p,q)), если n – наибольшее из натуральных чисел, делящее p и q. Число n называется наименьшим общим кратным чисел p и q (НОК(p,q)), если n – наименьшее из натуральных чисел, делящееся на p и q.

Если $r_1, r_2, \ldots, r_k$ общие простые делители чисел p и q, а $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – наименьшие степени, с которыми они входят в мультипликативное разложение p и q, то НОД(p,q) = $r_1^{m_1} \cdot r_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot r_k^{m_k}$. Чтобы найти НОК($p,q$), достаточно разделить произведение $p \cdot q$ на НОД(p,q).

1.2. Рациональные числа.

Всякое рациональное число единственным образом представимо в виде $\frac{p}{q}$, где p – число целое, а q – натуральное число, причем числа p и q взаимно просты, то есть не имеют общих простых делителей. В частности, целое число m имеет вид $\frac{m}{1}$. Такая форма записи называется обыкновенной (несократимой) дробью, p – числителем, а q – знаменателем этой дроби. Кроме несократимых дробей рассматриваются произвольные дроби, у которых числитель и знаменатель имеют общие простые делители. Если дробь имеет вид $\frac{pr}{qr}$, то она определяет то же рациональное число, что и $\frac{p}{q}$.

Арифметические операции над обыкновенными дробями выполняются по следующим правилам:

$\frac{p}{q} \pm \frac{m}{n} = \frac{pr \pm ms}{HOK(q,n)}$, где r – частное от деления НОК(q,n) на q, а s – на n, либо $\frac{p}{q} \pm \frac{m}{n} = \frac{pn \pm mq}{qn}$ с последующим сокращением числителя и знаменателя на общий сомножитель;

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}.$$

1.3. Степени и корни.

Натуральной степенью n числа a называется число a^n, равное произведению n сомножителей a. Корнем n-й степени числа a называется число $\sqrt[n]{a}$, n-я степень которого равна a (если такое число существует). В случае четной степени ($n=2k$) число выбирается положительным (арифметический корень). Исходя из этого, определяются отрицательная и дробные степени числа:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,;\, a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Ниже перечислены основные свойства степеней для произвольных действительных чисел n, m:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}\,;\,(a^n)^m = a^{nm}\,;\,(ab)^n = a^n b^n\,;\,\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\,;\,\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

1.4. Абсолютная величина или модуль числа a определяется следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Из определения следует, что модуль числа всегда существует и неотрицателен.

1.5. Формулы сокращенного умножения.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm ab + b^2$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$.

1.6. Разложение многочлена на множители.

Если многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ степени n имеет корень x_0, то данный многочлен делится на линейный многочлен вида $x - x_0$ (теорема Безу), то есть представим в виде

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0).$$

Как следствие, получаем следующие два полезных результата.

a) Разложение квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

b) Если многочлен с целыми коэффициентами $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет рациональный корень, записанный в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то p есть делитель свободного члена a_0, а q – старшего коэффициента a_n. Следовательно, подобрав один рациональный корень x_0 и разделив исходный многочлен на $x - x_0$, мы сведем отыскание корней многочлена n-й степени к отысканию корней многочлена степени $n - 1$.

Примеры решения задач

1. Среди чисел $7; \sqrt{80} - \sqrt{6}; \sqrt[3]{340}; 3000^{1/5} + 2; (2/89)^{-2/3}$ найдите наибольшее.

Сравним число 7 со всеми остальными числами. Довольно легко заметить, что $7 > \sqrt{80} - \sqrt{6}$. Действительно, $\sqrt{80} < 9$, а $\sqrt{6} > 2$, следовательно, $\sqrt{80} - \sqrt{6} < 9 - 2 = 7$. Здесь мы воспользовались двумя свойствами неравенств. Если $a \le b$ и $c \le d$, то $a + c \le b + d$, и, если $a \le b$, то $-a \ge -b$.

Сравнение чисел 7 и $\sqrt[3]{340}$ сводится к возведению обоих чисел в 3-ю степень. Так как $7^3 = 343 > 340$, то $7 > \sqrt[3]{340}$.

Докажем теперь, что $7 > 3000^{1/5} + 2$. Действительно, данное неравенство равносильно неравенству $5 > 3000^{1/5}$, которое, в свою очередь, равносильно верному неравенству $3125 > 3000$. Следовательно, верно и исходное неравенство.

Оценим последнее число $(2/89)^{-2/3} = (89/2)^{2/3} = 44{,}5^{2/3} > 27^{2/3} = 9 > 7$. Таким образом, последнее число является наибольшим.

2. Найти среднее арифметическое дробей $\frac{21^{40}}{63^{20}}$ и $\frac{21^{39}}{63^{19}}$.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{21^{40}}{63^{20}} + \frac{21^{39}}{63^{19}}\right) = \frac{21^{39}}{2 \cdot 63^{19}}\left(\frac{21}{63} + 1\right) = \frac{3^{39} \cdot 7^{39}}{2 \cdot 9^{19} \cdot 7^{19}}\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{3^{39} \cdot 7^{20}}{2 \cdot 3^{38}} \cdot \frac{4}{3} = 2 \cdot 7^{20}.$$

3. Вычислить $\sqrt{4-4\sqrt{5}+5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

Решение задачи основано на выделении полного квадрата под корнем. В самом деле, $4-4\sqrt{5}+5=(2-\sqrt{5})^2$ и $14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2$. Так как $\sqrt{a^2}=|a|$, наше выражение примет вид $|2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|$. Вычисляя модули, получим $-2+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=1$.

4. Вычислить $(0{,}39-1{,}326:1{,}3)\cdot 2\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$.

Для решения задачи все числа в данном выражении нужно представить в виде обыкновенных дробей и произвести указанные действия. Получим

$$\left(\frac{39}{100}-\frac{1326}{1000}:\frac{13}{10}\right)\cdot\frac{25}{12}+\frac{1}{4}=\left(\frac{39}{100}-\frac{1326}{1300}\right)\cdot\frac{25}{3\cdot 4}+\frac{1}{4}=\frac{39\cdot 13-1326}{1300}\cdot\frac{25}{3\cdot 4}+\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{39-102}{100}\cdot\frac{25}{3\cdot 4}+\frac{1}{4}=\frac{13-34}{4\cdot 4}+\frac{1}{4}=-\frac{21}{16}+\frac{1}{4}=-\frac{17}{16}.$$

5. Вычислить $\left[2^{1/4}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{2}-1}{(\sqrt[4]{2}+1)^2}}+\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2}}\right]^{-3/5}:(\sqrt{2}-1)^{4/5}$.

а) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{2}-1}{(\sqrt[4]{2}+1)^2}}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt[4]{2}-1)^2}{(\sqrt[4]{2}+1)^2(\sqrt[4]{2}-1)^2}}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt[4]{2}-1)^3}{(\sqrt{2}-1)^2}}=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2}}$;

б) $2^{1/4}\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2}}+\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2}}=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2}}\cdot(\sqrt[4]{2}+1)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2}}=(\sqrt{2}-1)^{1/3}$;

в) $\left((\sqrt{2}-1)^{1/3}\right)^{-3/5}=(\sqrt{2}-1)^{-1/5}$;

г) $(\sqrt{2}-1)^{-1/5}:(\sqrt{2}-1)^{4/5}=(\sqrt{2}-1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}+1$.

6. Найти сумму наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел 72 и 64.

Для решения задачи разложим данные числа на простые множители. Получим $72=2^3\cdot 3^2$ и $64=2^6$. Тогда $НОД(72;64)=2^3=8$ и $НОК(72;64)=2^6\cdot 3^2=576$.

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи: $8+576=584$.

7. Найти сумму остатков, получающихся при делении числа 7263544587435873 на 2,4,5,9,10,25.

Для нахождения остатка при делении на 2,4,5,10,25 достаточно рассмотреть лишь число, составленное из последних двух цифр данного числа, так как любое количество сотен делится на указанные числа. Таким образом, для данного числа остатки будут равны 1, 1, 3, 3, 23 соответственно. Остается заметить, что требуемое число делится на 9, так как сумма его цифр делится на 9. В результате получается ответ: 31.

8. Упростить выражение $\dfrac{x-6x^{-1}-7}{x-5x^{-1}-4}$.

Избавимся от отрицательных степеней домножением числителя и знаменателя на x. В результате получаем выражение $\dfrac{x^2-7x\ \ -6}{x^2-4x\ \ -5}$. Далее разложим квадратные трехчлены в числителе и знаменателе на множители и произведем сокращение: $\dfrac{x^2-7x\ \ -6}{x^2-4x\ \ -5}=\dfrac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x-5)}=\dfrac{x-6}{x-5}$.

9. Упростить выражение $\left(\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{4ba}{b^2-a^2}\right)^{-1}$.

Выполним преобразования “по действиям”:

1) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}=\dfrac{b-a}{ab}:\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{b-a}{b+a}$;

2) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}=\dfrac{b+a}{b-a}$;

3) $\dfrac{b-a}{b+a}-\dfrac{b+a}{b-a}=\dfrac{b^2-2ab+a^2-b^2-2ab-a^2}{b^2-a^2}=\dfrac{-4ab}{b^2-a^2}$;

4) $-\dfrac{4ab}{b^2-a^2}\cdot\dfrac{b^2-a^2}{4ab}=-1$.

10. Упростить выражение $\dfrac{xy+x^2-6y^2}{x^2-xy-2y^2}$.

Разделив числитель и знаменатель на y^2 и сделав замену $t=\dfrac{x}{y}$, получим дробь $\dfrac{t^2+t-6}{t^2-t-2}$. Теперь разлагаем на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе и сокращаем общие делители:

$$\frac{t^2+t-6}{t^2-t-2}=\frac{(t-2)(t+3)}{(t-2)(t+1)}=\frac{t+3}{t+1}.$$

Наконец, возвращаясь к исходным переменным, получаем ответ:

$$\frac{\frac{x}{y}+3}{\frac{x}{y}+1}=\frac{x+3y}{x+y}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Среди чисел 6; $\sqrt{3}+\sqrt{11}$; $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{16}\right)^{-2}}$; $\sqrt[5]{250}+3$; $\left(\frac{7}{24}\right)^{-\frac{5}{2}}$ найдите наименьшее.
2. Среди чисел 5; $\sqrt{50}-\sqrt{5}$; $\sqrt[5]{300}+2$; $\sqrt{\sqrt[3]{999}+15}$; $\left(\frac{16}{5}\right)^{-\frac{4}{3}}$ найдите наибольшее.
3. Среди следующих чисел выбрать те, которые делятся на 3: 1231238233247, 6142748569371, 8174628408914, 7051845128361, 623514383926.
4. Среди следующих чисел выбрать те, которые делятся на 9: 4627825409826, 1938608469557, 8102734961266, 1235072612831, 5320173485620.
5. Вычислить $\sqrt{4-4\sqrt{7}+7}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.
6. Вычислить $\left(100^{-0.5}\cdot 64^{\frac{2}{3}}\cdot 0,2^{-\frac{1}{2}}\cdot 4^{-\frac{3}{4}}\cdot 4^{-0.75}\right)^{4}$.
7. Вычислить $\left(3+\sqrt{2}\right)^{3}\left(3-\sqrt{2}\right)^{2}-\left(3+\sqrt{2}\right)^{2}\left(3-\sqrt{2}\right)^{3}$.
8. Вычислить $\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right)^{-6}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^{3}}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{-2}\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^{2}}$.
9. Вычислить $\left(12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{-1}\cdot\left(18\sqrt[3]{-81}\right)^{-\frac{1}{3}}$.
10. Вычислить $5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{-192}}\cdot\left(12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}\right)^{-\frac{1}{3}}$.
11. Найти частное от деления наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель чисел 125 и 150.
12. Найти произведение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел 600 и 1260.
13. Упростить выражение $\frac{x-6x^{-1}-1}{x-3x^{-1}-2}$.
14. Упростить выражение $\frac{3\sqrt[3]{3n^2}-\sqrt{m}}{\sqrt[3]{9n}-\sqrt[4]{m}}$.
15. Упростить выражение $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}-b}{a^{\frac{2}{3}}-b}+\frac{a}{a+a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b}}$.
16. Упростить выражение $\left(\frac{ac-b}{a+b}-\frac{bc+a}{b-a}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{c^2-1}:\frac{a^2+b^2}{c-1}\right)$.
17. Упростить выражение $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.
18. Упростить выражение $\frac{8x^{-3}+8x^{-2}+2x^{-1}}{0,25x^2+x+1}$.
19. Упростить выражение $\frac{a^2+3ab+2b^2}{a^2+6ab+5b^2}$.
20. Упростить выражение $\frac{a^2+2ab+b^2-16}{a^2+b^2+2ab+5a+5b+4}$.

Ответы к задачам § 1

1. $\sqrt{3}+\sqrt{11}$
2. $\sqrt[5]{300}+2$
3. второе и четвертое
4. первое
5. 1
6. $1/25$
7. $98\sqrt{2}$
8. $19-6\sqrt{10}$
9. $-\frac{1}{7}$
10. $-\frac{10}{3}$
11. 30
12. 756000
13. $\frac{x+2}{x+1}$
14. $\sqrt[3]{9n}+\sqrt[4]{m}$
15. 1
16. 1
17. 1
18. $\frac{8}{x^3}$
19. $\frac{a+2b}{a+5b}$
20. $\frac{a+b-4}{a+b+1}$